IDEA
LOGISTICÆ
Vniuersæ Mathesi seruientis.

ÆGIDII FRANCISCI
DE GOTTIGNIES

Bruxellensis è Societate IESV
In Collegio Romano
MATHESEOS PROFESSORIS

LOGISTICÆ
IDEA

Speculatiuè & practicè declarata.

LIBER PRIMVS.



ROMAE, Typis Nicolai Angeli Tinassij. 1677.
SVPERIORVM PERMISSV.

Causa scribendi Ideam nostræ

LOGISTICÆ

Atque eius Argumentum.



NEmo Matheseos non plane ignarus, negabit; à sensuum cognitione alienam esse eam quantitatem, quam tanquam proprium suum obiectum contemplatur Mathesis; quare neque oculis, neque auribus, neque vllo alio externo sensu, sed solo intellectu percipimus notitias, quæ Mathesi propriæ sunt: istæ notitiæ habentur sine vllo discursu, per lumen rationali naturæ infusum, quoties satis immediatè connexæ sunt cum terminorum intelligentia: aliàs acquiruntur discursu atque ratiocinatione. Igitur primum vniuersæ Matheseos fundamentum est terminorum intelligentia: hoc si vacillet, profecto firmum dici non poterit, quod illi innititur. Pro Mathesi requisita terminorum intelligentia nobis infusa non est ab authore rationalis naturæ: quis terminos illos exponat, vel vnde illorum intelligentia ab alijs supponatur, planè ignoro; & vt hic nihil dicam de significatione vocum *proportio, angulus, vnitas, numerus, &c.* inter Mathematicos communi consensu certum est, continuam quantitatem Geometriæ, discretam quantitatem Arithmeticæ obiectum esse; scientiæ istæ inter se diuersæ sunt,

 atque

atque ab obiectorum diuersitate mutuantur differētiam: quis tamen affert definitionem quantitatis quam Mathesis considerat, quis exponit, quid sint, vel in quo inter se conueniant, aut differant illæ quantitates, quarum altera dicitur continua, altera discreta? si vero desint huiusmodi definitiones, siue terminorum expositiones, atque adeo ipsi termini non intelligantur, non percipio vnde haberi possint veritates ex ipsis terminis notæ, atque prima Matheseos fundamenta, ex quibus reliquæ legitimis discursibus inferenda sunt. Memini, cum in Mathematicis studijs iunior essem, videbantur mihi hæc omnia satis clara; verum successu temporis, etiam in ipsis Matheseos principijs plures, & satis densas tenebras notaui: atque ab oculis meis euanuit illud lumen, quo prius apparebant fulgere. Satis communis Astronomorum opinio est, quod si aliquis in Luna constitutus aspiceret orbem terrarum, illi non minus fulgidus atque illuminatus appareret, quam nobis in terra constitutis appareat globus Lunaris: quales tamen luminis defectus, quales vmbras, ac tenebras aduertimus in terra, qui illam cominus intuemur? passim in terra huiusmodi obiecta inueniuntur, quæ eminus conspecta omni ex parte apparent lucida, & tamen satis notabiles luminis defectus atque obscuritates exhibent, quando propius oculis admouentur. Suspicor ego simile aliquid contingere in Mathematicis non paucis, atque ipsis clarissima videri passim vsitata Matheseos principia, quia ab eorum intelligentia remotiores sunt. Ego certe ab ipsis principijs exordium sumere coactus sum, vt traderem Mathemati-

ca.

ca tractandi methodum, quam inscripsi, *Logisticam vniuersæ Mathesi seruientem*: etenim apud alios non inueni terminorum expositionem, quam hæc methodus requirit. Quidquid sit de voce Logistica, vel de vocis huius vsu, aut abusu, qui apud aliquos modernos inuenitur: eius significatio nullam nisi fallor ratiocinationem excludit; de hac voce sequentia inueniuntur apud Iacobum Peletarium in epistola apologetica contra N.N. Parisijs impressa anno 1560. In Logisticæ voce quam sibi complacet egregius iste verborum conquisitor, & artifex, qui eam à se primum ad nos adductam gloriatur. Quod vt vere diceret, quid esset quod ex re tam exigua sibi laudem assumeret? sed eam ipsam Erasmus Reinoldus iam ante vsurpauerat, dum calculum Astronomicum inscribit Logisticam scrupulorum astronomicorum. Vox enim Logistices, omnem vniuersè ratiocinationem significat: neque solitariè poni debet, quemadmodum ineptè posuit NN. Hæc ille, quæ puto esse verissima. Quare existimaui, Logisticam vniuersæ Mathesi seruientem inscribi posse eam tractationem, in qua propono modum, commodè atque vtiliter instituendi discursus, atque ratiocinationes, conducentes ad quaslibet notitias spectantes ad Mathesim. Hac tamen tractatione non complector singula, quæ prædictos discursus iuuant: sed pauca aliqua, quæ post varia tentamina expertus sum, discentibus magis prodesse. Etenim apud eos quos ex officio teneor instituere in Mathematicis disciplinis, successiue varias methodos tentaui; obseruando, cui felicior effectus, siue æquali tempore, & cæteris paribus,

maior

maior in Mathematicis profectus responderet; ac tandem didici, methodum quam trado in prædicto opusculo, cæteris omnibus, non tantum felicius succedere: verum etiam cum hac methodo compositum satis moderatum paucorum mensium studium, amplius prodesse: quam iuuet plurium annorum magis intensum studium, coniunctum vlli alteri methodo à me tentatæ. Prædictam nostram Methodum, siue vniuersæ Mathesi seruientem Logisticam, compendiata scriptione complexus fueram, quatuor diuersis paucarum paginarum libris. Primus proponebat, prima, & practica potius, quam speculatiua fundamenta nostræ Logisticæ, destituta omni probatione. Secundus in aliquot exemplis exhibebat, ad praxim reducta principia, siue fundamenta in primo libro proposita. In tertio libro, prius afferebam Logisticæ nostræ speculatiua principia, atque ex his deducta singula, quæ prioribus libris proposita erant, sed non satis stabilita: deinde firmioribus illis fundamentis innixa, paulò altius assurgebat nostra Logistica. Denique in quarto libro discutiebantur aliqua, quæ videbantur speciali examine indigere: vel quia aliorum doctrinis non satis consona erant; vel quia ab æquiuocationis pariculo liberari non poterant paucis verbis proposita: vel quia alio ex capite attentiori consideratione digna videbantur. Ex commemoratis quatuor libris nostræ Logisticæ, soli priores duo viderunt lucem: his tamen ex posterioribus libris accesserunt aliqua: statueramque prioribus libris immediatè addere posteriores: verum consilium mutare coëgerunt de prioribus libris ad me

delata

delata amicorum iudicia; ex quibus aliqua ita fauent nostræ Logisticæ, vt in his suspicer aliquam adulationem; quæ ab alijs reprehenduntur, pleraque, vel talia sunt; quæ Logisticæ nostræ non conueniunt: vel quæ supponunt me aliorum vestigijs insistere, quorum doctrinam non sequor. Singulorum iudicia mihi fuere gratissima, immo magis placuerunt, quæ minus fauent: ex quibus, licet (vt volebam) non didicerim commissos à me errores, didici tamen, ex priorum librorum lectione, plurimos non satis feliciter assequutos esse mentem meam; ex quo intuli, compendiosius à me scriptos posteriores duos libros minus profuturos, nisi prius paulò fusius exponerem, atque declararem, quid sit nostra Logistica, & quomodo methodus in illa proposita differat ab omni methodo ab alijs vsitata, atque maxime discrepet ab illa methodo cum qua multorum iudicio maiorem affinitatem habet: ac denique, iuxta Logisticæ nostræ methodum propositas exhibendo varias Matheseos partes, ostenderem, quis sit eius vsus. In hunc finem duo opuscula putaui conscribenda: alterum, quod contineret eam Arithmeticæ partem, quæ in Logistica nostra aliundè cognita supponitur: atque ex hac Arithmetica, deductam deriuationẽ eorũ quæ primo Logisticæ nostræ libro continentur: hoc opusculũ inscribitur, *Arithmetica introductio ad Logisticam vniuersæ Mathesi seruientem*. Alterum est præsens opusculum; quod inscribitur *Idea Logisticæ vniuersæ Mathesi seruientis, speculatiuè, & practicè declarata*. In hoc opusculo prius expono quem finem mihi proposuerim in scribenda Logistica: & me-

dia aliqua quæ elegi ad consequendum finem propositum: atque ità repræsento ideam, quam in scribendo sequutus sum: hanc habes in prima parte. Deinde vt nihil aliunde supponendo, practicè declarem prius propositam ideam, in secunda parte statuo principia quibus vtor, & noto aliqua spectantia ad Matheseos principia. In tertia parte propono fundamenta doctrinæ de angulis, maxime vtilia pro Geometria. In quarta parte, trado fundamentalem doctrinam proportionum, quæ non minus requiritur pro Arithmetica, quam pro Geometria, ac Mathesi vniuersa. In quinta parte, affero pauca aliqua theoremata vniuersalia, ex quibus deriuata exhibentur non pauca theoremata magis restricta, quæ apud Euclidem, & Archimedem numerantur inter præcipua, atque maxime vtilia. In sexta parte proponuntur nonnulla de conicis sectionibus, & triangulis, atque parallelogrammis cylindricis. Septima pars continet aliqua problemata Arithmetica exercitij gratia à me proposita auditoribus meis, atque ab ipsis soluta. His primo libro finem impono, totidem alias partes reseruando pro secundo libro, quem priori addam, quando id mihi erit integrum. Singula quæ in primo Logisticæ nostræ libro proposita erant, sed non sufficienter probata: legitime, nisi fallor, stabilita inueniuntur, vel in hac idea, vel in Arithmetica introductione ad nostram Logisticam. His duobus opusculis etiam continentur plurima, quæ spectant ad quartum librum nostræ Logisticæ; etenim vt mea stabilirem, subinde ex alienis aliqua erant reijcienda: ne tamen veritatem (vt par est) liberè propugnando,

do,

do, offendam aliquem innocenter aberrantem, aut à veritate, aut à recta quæ ad illam ducit via: silentio inuoluo nomina authorum, quorum defectus, aut errores cogor insinuare: si tamen ex ijs non sint, quos in Mathematicis meos magistros agnosco: quibus proinde nihil discedit, sed potius ipsorum gloriæ accedit, si forte ipsis prælucentibus boni aliquid assequutus sim in scientijs Mathematicis: atque ex doctrinis quas tradiderunt, aut sustulerim aliquem defectum, aut æstimatione dignum quicquam addiderim.

EGo Dominicus Brunaccius Societatis Iesu, in Prouincia Romana Præpositus Prouincialis, potestate ad id mihi facta à Patre nostro Generali Io. Paulo Oliua, facultatem facio, vt liber cui titulus *Logistica Idea speculatiuè & practicè declarata*, à P. Aegidio Francisco de Gottignies nostræ Societatis Sacerdote conscriptus, & eiusdem Societatis doctorum virorum iudicio approbatus, typis mandetur, si ijs, ad quos spectat, ita videbitur. In quorum fidem has litteras manu mea subscriptas, & sigillo muneris mei signatas dedi. Romæ 7. Martij 1676.

Dominicus Brunaccius.

Imprimatur,
Si videbitur Reuerendiss. P. Mag. Sac. Pal. Apost.

I. de Ang. Archiep. Vrb. Vicesg.

Imprimatur,

Fr. Raymundus Capisuccus Ord. Prædicatorum Sac. Pal. Apost. Mag.

AD-

ADMONITIO
AD
LOGISTICAE
Nostræ studiosum.

NOtandum diligenter, voces intelligendas esse in eo sensu in quo à nobis adhibentur; quo loco declarentur voces quæ expositione indigent, commodè disci poterit ex indice, apposito in fine huius libri.

A IDEAE

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS PRIMA.

ARGVMENTVM.

PEtita prius licentia, adhibendi voces in ea significatione qua nobis vtilis est, declaratur quo sensu velimus intelligi nonnullas voces. Deinde summatim proponitur, atque exponitur finis nobis propositus in scribenda Logistica, & via qua Logistica tendit ad propositum finem: atque concluditur, finem in Logistica intentum, nouum non esse: ipsam verò viam, eo titulo Logisticæ nostræ propriam esse, quod nusquam inueniatur vsitata. His adduntur aliqua reflexiones, nostro iudicio maximè vtiles, ad maiorem intelligentiam strictæ Matheseos, atque nostræ Logisticæ. Denique declaratur, quam partem viæ Logisticæ nostræ propriæ contineant duo priores libri Logisticæ, quomodo per hanc viæ partem tyrones ducant, quæ media submistrent, vel vt eos dirigant, vel aliter iuuent.

CAPVT PRIMVM.

Petitur licentia attribuendi vocibus eam significationem quæ nobis vtilis est.

IDea Logisticæ, aliud non est, quam mentis meæ conceptus, cui respondet opusculum illud quod Logisticæ titulo putaui inscribendum. Mentis conceptibus exprimendis inuentæ sunt voces, quæ non aliundè significationem suam acceperunt, quam ex hominum beneplacito, atque conuentione. Si singulis diuersis mentis conceptibus, voces diuersæ, & passim cognitæ responderent, facile mihi foret exponere meæ Logisticæ Ideam; nunc vero in eius expositione, præcipua difficultas mihi suboritur, ex penuria vocum, quæ in alijs producant conceptus similes conceptibus mentis meæ, quos non aliter quam vocibus pos-

ſum exhibere. Fateor quidem quod nullos conceptus debeam vocibus repræſentare, quibus ſimiles, alij vocibus non indicent: ſed etiam ſcio me vſu didiciſſe, in diuerſis eiuſdem ſcientiæ paleſtris non infrequenter iiſdem vocibus exprimi conſueuiſſe, conceptus, toto vt ita dicam cælo, inter ſe diuerſos; quanto magis id verum erit, de diuerſarum ſcientiarum paleſtris? neque aliquis mihi dicat ſequendum mihi eſſe eum loquendi modum, atque à me adhibendas eas voces, quæ in Collegij Romani ſcholis; toto orbe celeberrimis, vſitatæ ſunt. Ego certe calamum abijcerem ſi iſta lex mihi præſcriberetur; ſi enim tantummodo intelligi debeam ab ijs, qui vniuerſitatis huius frequentant ſcholas, priuati iuris remanet idea meæ Logiſticæ: neque alia ex cauſa eam ſuſcepi ſcribendam, quam vt fieret publici iuris; quare vt iuxta admiſſum hic principium, ceſſante cauſa etiam effectus ceſſet, ſcriptionem debeo omittere, ſi prædictas voces adhibendo, ſperare non poſſum me intelligendum ab ijs ad quos ſcribo; quod vero tali caſu non intelligerer, indubitatum mihi eſt; & ne aliquis ſuſpicetur parum fundatam hanc meam opinionem, placet expendere, ex pluribus quas afferre poſſem, vnicam vocem, nimirum vocem, potentia: hæc maximè communis atque vſitata eſt in Academia in qua verſor, vbi ſignificationes plurimas habet, ſed ex pluribus nonniſi vnicam conſidero, eam ſcilicet quam habet, quando aliquid dicitur eſſe potentia, vel etiam pura potentia, alicuius concreti: quo ſenſu nobis vſui eſſe poſſet, qui de concretis ſæpe agimus, atque in definitionibus quantitatis, quas in Logiſtica attulimus, aſſerimus, quantitatem continuam eſſe concretum extenſionis: ſiue ſubiectum habens extenſionem: quod ſubiectum iuxta vſitatum hic loquendi modum rectè appellatur potentia: immo ſubiectum præcisè tantum conſideratum vt ſubiectum eſt, pura potentia dici conſueuit; & quoniam iuxta noſtras definitiones, linea eſt concretum longitudinis, conformiter ad prædictum loquendi modum, potentia lineæ erit illud, quod in lineâ inuenitur diſtinctum ab ipſa longitudine, ſiue vt nos loquimur, ſubiectum longitudinis, iam vero ſi ita loquar, atque ſubiectum longitudinis appellem potentiam lineæ, quis Mathematicorum me intelliget, apud quos per plura annorum millia continuato vſu, atque conſenſu, quadratum factum ſupra lineam, appellatur potentia lineæ? quod ſi ne quidem liberè poſſim adhibere voces in ea ſignificatione, quæ vſitata eſt in ſcholis in quibus verſor, quas ſcholas ſequar, in vocibus exponendis: aut ex qua ſchola eas deſumam, prætermiſſa expoſitione? at inquies Mathematicorum loquendi morem ſequendum eſſe mihi, qui ſcribo ad Mathematicos; verum apud ipſos expreſſos vocibus non inuenio eos mentis conceptus, qui mihi vocibus exponendi ſunt, vt repræſentem

tem Logisticæ meæ Ideam: sequar tamen apud Mathematicos vsitatum morem; hi præmissa expositione, satis liberè assumunt voces, quibus indicent conceptus suos, quoties desunt communi consensu prius admissæ: & pauca hæc putaui præmittenda, vt hanc à non Mathematicis licentiam impetrarem: etenim sapientibus & parum scientibus debitor sum, quandoquidem non minus scribam ad eos qui ad Mathematicas disciplinas recenter accedunt, quam ad eos, qui in Mathematicis versati sunt.

CAPVT II.

Exponitur quid sit stricta Mathesis, & quomodo diuidatur.

OMnibus notum suppono, quid significet vox, ens, quando dicitur ens adæquatè diuidi in positiuum & negatiuum, in qua significationis amplitudine eam vocem deinceps adhibebimus. Similiter cognitum arbitror quid significent voces genus, species, indiuiduum, quando exempli gratia dicitur ens esse genus, quod diuiditur in alia genera, species, indiuidua. Præterea apud omnes indubitatum esse arbitror quod vnum ens alteri conuenire possit, atque vnum ens possit affirmari de altero: adeoque communi atque ab omnibus scholis admisso vsu legitimum esse eum loquendi modum, quo exempli gratia asseratur, dari ens quod curuum sit, vel quod habeat curuitatem: quæ loquutiones legitimæ esse non possunt, nisi possint intelligi: eas vero intelligere prorsus impossibile est, nisi intelligantur duo entia inter se distincta, quorum primum sit ens de quo affirmatur curuitas, siue quod dicitur habere curuitatem: secundum sit ens quod per vocem curuitas exprimitur, quodque de priori illo ente affirmatur, siue ab illo haberi dicitur. Quoties vero vnum ens de altero ente affirmatur, illud præcisè de quo alterum affirmatur, appello subiectum concreti: alterum ens quod affirmatur, appello prædicatum concreti: denique complexum ex concreti subiecto, & prædicato, appello concretum: adeo vt concretum sit complexum ex ente de quo alterum affirmatur, & ex ente quod affirmatur; huius concreti siue complexi subiectum, siue materia, est solum illud ens, de quo alterum affirmatur; eiusdem concreti prædicatum siue forma, est solum illud ens quod affirmatur.

Ens Physicum, appellatur, ens capax percipi sensu externo. Ens Logicum, vocatur ens tantum capax percipi intellectu. Iuxta hanc

expositionem entis physici & logici, (quæ pro nostra Logistica commoda est) sola indiuidua, siue entia indiuidualia, possunt dici entia physica: & omnia genera, ac species omnes, siue omnia entia generica atque specifica, erunt entia logica: hæc intellectu assequimur, præscindendo, abstrahendo, discurrendo, &c. neque percipi possunt, nisi per operationes quæ spectant ad Logicam. Illa percipi possunt per operationes externorum sensuum, quæ magis proprie spectant ad physicam.

Stricta Mathesis dicitur illa scientia, quæ pro obiecto habet quantitatem logicam. Idem alijs vocibus asserere mihi videntur alij, qui dicunt, strictam Mathesim considerare solam quantitatem abstractam à materia sensibili: etenim eo ipso quod sit quantitas abstracta à materia sensibili, etiam est diuersa ab ente sensibili, atque adeo non est quantitas physica, sed quantitas quæ iuxta nos Logica dici debet. Stricta Mathesis à me diuiditur in Mathesim vniuersalem, Geometriam, & Arithmeticam.

Stricta Mathesis vniuersalis, quam intelligi volumus per Mathesim vniuersalem, est illa scientia quæ pro obiecto habet quantitatem logicam non restrictam, hoc est illam quantitatem, quam in Logistica appellamus vniuersalem, non restrictam ad continuam aut discretam quantitatem. Arithmetica pro obiecto habet quantitatem discretam. Geometriæ obiectum est quantitas continua. Definitiones quantitatis vniuersalis, item quantitatis discretæ, & continuæ, proponuntur in appendice libri secundi Logisticæ: vbi asserimus singulas illas quantitates esse concreta aliqua; & primo quidem, quantitatem vniuersalem esse concretum magnitudinis vniuersalis. Secundo, quantitatem continuam esse concretum extensionis. Tertio, quantitatem discretam esse concretum discretionis; quoniam vero iuxta ea quæ paulo ante diximus, concretum intelligi non possit, nisi intelligatur, subiectum, & prædicatum ipsius concreti, à me hic peti posset expositio subiecti & prædicati vniuscuiusque ex tribus illis concretis, quorum vnum dicitur quantitas vniuersalis: alterum quantitas continua: tertium quantitas discreta. Vt huic quæsito satisfaciam, noto, quod voces discretio & discretum, deriuentur à verbo discernere; quemadmodum voces extensio, & extensum, deriuantur à verbo extendere; quod indicasse satis arbitror, vt intelligatur, quid significent voces discretio, & extensio, aut quid sit abstracta discretio, atque abstracta extensio; iam vero abstracta discretio à qua aliquod concretum discretionis dici potest maius vel minus altero concreto discretionis, vel illi æquale, vocatur abstracta magnitudo discretionis. Similiter abstracta extensio, à qua aliquod concretum extensionis, potest dici maius vel mi-
nus

nus altero concreto extensionis, vel illi æquale, appellatur abstracta magnitudo extensionis. Denique magnitudo, quæ est veluti genus, quod adæquatè diuiditur in abstractam magnitudinem discretionis; & abstractam magnitudinem extensionis, dicitur abstracta magnitudo vniuersalis. Hinc ad paulò ante propositum quæsitum respondeo, & dico primo: in concreto quod dicitur quantitas vniuersalis, subiectum est ens de quo affirmatur abstracta magnitudo vniuersalis; prædicatum est abstracta magnitudo vniuersalis. Dico secundo: in concreto quod appellatur quantitas continua, subiectum est ens de quo affirmatur abstracta magnitudo extensionis, prædicatum est abstracta magnitudo extensionis. Dico tertio: in concreto quod vocatur quantitas discreta, subiectum est ens de quo affirmatur abstracta magnitudo discretionis; prædicatum est abstracta magnitudo discretionis. Quantitatis vniuersalis, continuæ, & discretæ, definitiones hic propositæ, quæque ad istarum definitionum intelligentiam annotauimus, etiam inuenies in appendice Libri secundi Logisticæ: quare arbitror me, tum hic, tum in dicta appendice, non solum attulisse legitimas definitiones quantitatis vniuersalis, continuæ, ac discretæ: verum etiam annotasse, quidquid iustè requiri potest, ad illarum definitionum plenam intelligentiam.

CAPVT III.

Exponitur finis nobis propositus in scribenda Logistica, & via qua Logistica ducit ad propositum finem.

PRæcedenti capite expositas, atque à me definitas tres quantitates diuersas, agnouerunt antiquiores Mathematici: eam tamen, quam nos vniuersalem appellamus, non raró videntur significare per vocem magnitudo: qua voce passim vtitur Euclides libro quinto suorum elementorum; atque per illam significat quantitatem non restrictam ad continuam, aut discretam, sed ad vtramlibet restringibilem, quæ proinde non differt à quantitate, quam in Logistica appellamus vniuersalem, supposito quod per quantitatem nobiscum intelligi velit aliquod concretum, quam eius mentem inquirere huius loci non est. Veritates de quantitate vniuersali ab Euclide libro quinto propositæ, ab ipso assumuntur, atque adhibentur in reliquis libris, in quibus non amplius agit de quantitate vniuersali, sed vel continuam,

vel

vel diſcretam quantitatem conſiderat: optimè enim nouerat, illud quod generi conuenit, hoc etiam conuenire ijs omnibus, quæ tali genere continentur, atque adeo, tam de continuis, quam de diſcretis quantitatibus omnibus verificari, ſingula illa theoremata, quæ de quantitate vniuerſali demonſtrauerat prædicto libro quinto: quoties enim plura eodem genere continentur, ſuperfluo planè labore replicatis diſcurſibus oſtenditur, de ſingulis illis pluribus verificari aliquid, quod demonſtrari poteſt de ipſo genere, atque hoc modo breuius oſtendi, conuenire ſingulis, quæ tali genere continentur. Hinc cæteris paribus tanto ſemper maiori in pretio apud Mathematicos fuere theoremata, quanto magis vniuerſalia; & ſua, atque non vulgari laude digni iudicati ſunt, qui minùs latè patentia theoremata ad maiorem amplitudinem, atque vniuerſalitatem euexerunt; quod ſi verum eſt, vt apud omnes, quantum ego quidem arbitror, veriſſimum eſt, atque certiſſimum: probare non poſſum, quod Euclides, abſoluto libro quinto, negligat quantitatem vniuerſalem, tanta vtilitate priùs conſideratam, atque de illa non proponat, ac demonſtret reliquas proprietates, tàm continuæ, quàm diſcretæ quantitati communes. Quod Euclides, vel non potuit, vel non voluit, vel ſaltem non fecit, conor ego facere in mea Logiſtica: in qua primarius ſcopus mihi propoſitus, alius non eſt, quam ſub maxima, quam admittunt vniuerſalitate, atque amplitudine, proponere, atque demonſtrare Theoremata, aut Problemata ſpectantia ad ſtrictam Matheſim. Hic ſcopus Mathematicorum nulli non placuit, & video eum à præcipuis Matheſeos cultoribus paſſim fuiſſe laudatum, atque adamatum: ſua enim excellentia, atque ſublimitate facilè in oculos incurrit, atque ad ſe inuitat, & allicit; verum quæ ad hunc ſcopum commodè ducat via, non ita obuia eſt, ac patens, vt ſponte ſeipſum prodat, atque omnibus innoteſcat. Ex præſtantioribus Mathematicis, diuerſi, diuerſas vias elegerunt, per quas, vel ipſi ad prædictum ſcopum contendere conati ſunt, vel etiam à ſe deſcriptas ad poſteros tranſmiſerunt, vt prodeſſent quamplurimis: laudo ſingulorum conatus, atque ingenioſos labores: ſequi ſingulos non poſſum, immò quem ſequar neſcio: etenim ex illis, alij mihi videntur, vt ita dicam, volando propetare, atque per aërem viam elegiſſe, à terra ſublimem; mihi deſunt alæ. Alij per terram properant, ſed in ipſa via occurrentia impedimenta, ijs vt ita loquar ſaltibus, aut ſuperant, aut ſaltem prætergrediuntur, ad quos mihi deſunt vires. Alij quaſi ſubterraneas vias omni lumine deſtitutas videntur elegiſſe, ego lucem amo. Alij ſatis plana via contendunt, ſed per circuitus, atque ambages tum longè excurrentes, vt paſſu meis viribus proportionato per has vias ſubſequi, nihil aliud eſſet, quam nun-

Primarius finis Logiſticæ.

quam

quam finem consequi. Hæc, aut alia his similia iudicia formaui de vijs, quas ab alijs inueni propositas, aut descriptas, eas nimirùm tenuitati meæ parum conuenire; & postquam tentassem varias, mihi illam elegi, quæ ducit per generum, ac specierum scalas, ex solis entibus logicis compositas; & quoniam entia, ex quibus prædictæ scalæ componuntur, alia non sunt, quam quæ secundum nos entia logica appellantur, via nostra ex solis entibus logicis composita est: quare etiam non malè videbatur dici posse Logistica, illa scientia, quæ ex principijs suis, secundum Logicæ regulas discurrendo, per viam ex solis entibus logicis compositam, pergit ad finem sibi propositum. Si paulò clarius placet intueri, partem non postremam illius viæ, quæ Logisticæ nostræ propria est, atque ex entibus logicis composita, reflectere poteris, quomodo in quantitate vniuersali, consideremus primum genus quantitatis, quod in quinque alia quantitatum genera subdiuidimus, quorum alia alijs vniuersaliora sunt, singula tamen inter se distincta: his quantitatum generibus diuersis, vlteriùs addimus aliquas quantitatum species diuersas, ipsis generibus minùs latè patentes, quæ tamen ex vltimis quantitatum speciebus plures contineant: tales quantitatum species invenies in numeris, quos diuersi ordinis, aut classis appellauimus in definitione 24. & 25 cap. 8. lib. 1. Logisticæ, qui numeri, nihil aliud sunt, quam diuersæ discretarum quantitatum species, similiter hic in secunda parte inuenies quantitates, tum quinti, tum sexti generis, subdiuisas in quatuor diuersarum quantitatum classes, quæ iterum nihil aliud sunt, quam totidem species quantitatum, dictis generibus contentarum; in hac diuersarum quantitatum scala, ex generibus, atque speciebus composita, alijsque nonullis his similibus scalis, consideramus viam, Logisticæ nostræ propriam, quæ per hanc viam veritates euehit ad eam vniuersalitatem, quam admittunt; & rursus ex vniuersalioribus veritatibus descendit ad minùs vniuersales, quando id circumstantiæ exigunt. Vtinam via hæc ab alijs fuisset exculta! sic enim inuenissem illam magis explanatam, & commodam: fateor quod etiam alij agnouerint diuersa genera quantitatum, immo omnia illa quantitatum genera; quæ nos admittimus: sed quis vel solos conceptus exposuit, singulis generibus conuenientes? de his definitionibus, quam parum laborent, ex hoc vno collige, quod inter præcipuos, qui hoc tempore strictam Mathesim scriptis suis illustrare conati sunt, inueniantur, qui non dubitent pronuntiare, de lana caprina institutas disputationes illas esse, in quibus quæritur, an angulus quantitas sit: & si otiosum iudicent hoc inquirere, non immeritò suspicari possum, ne quidem aliquando illis incidisse vllam cogitationem, de conceptibus qui singulis diuersi generis

Via nostra logistica propria.

quan-

quantitatibus conueniant; si verò desint tales conceptus, nemo non videt, haberi non posse eam diuersarum quantitatum scalam, in qua statuimus partem non postremam illius viæ, quæ nostræ logisticæ propria est: neque persuadere mihi possum, aliquem inueniri adeo rudem, qui maximam diuersitatem non aduertat, inter fabricam ex lapidibus artificiosè constructam, & aceruum quem prius constituebant, antequam pro tali ædificio adhiberentur, aut pro illo expolirentur, scalæ nostræ partes singulæ antiquæ sunt, apud alios eas inueni, veluti tumultuariè simul positas, atque in aceruum collectas: ego ab inuicem prius diuisas, expolire conatus sum, & ex illis componere insinuatas scalas, logisticæ nostræ deseruientes: quæ scalæ, nostræ logisticæ eo titulo propriæ sunt, quod apud alios, quantum ego arbitror, non inueniantur, atque adeo per illas nemo ducat, ex ijs, qui in mathematicis viam præscribendi assumpserunt onus. Alicuius etiam scalæ meminerunt Algebræ scriptores, hanc nisi fallor in Geometricis progressionibus considerant: sed quid scalæ nostræ compositæ ex diuersis quantitatum generibus, ac speciebus, commune est, cum progressionibus Geometricis? verum huius loci non est cum alienis mea conferre, pauca tamen hæc putaui obiter insinuanda, ne gratis omnino, & nullo solido fundamento innixus, videar asserere, ab alijs vsitatam non esse eam viam, quam affero tanquam propriam nostræ logisticæ.

Hactenus exposuimus præcipuas duas partes ideæ nostræ logisticæ, nimirum primarium finem quem sibi præfixum habet, & viam per quam ducit ad prædictum finem: diximusque primarium logisticæ finem esse, quaslibet propositiones ad strictam Mathesim spectantes, euehere ad eam vniuersalitatem, quam admittunt: quem finem, primarium appellamus, quia difficultate atque excellentia cæteros antecellit, quos secundarios dicimus, quia minus sublimes sunt, atque minores difficultates annexas habent; huiusmodi fines secundarij sunt, exempli gratia proposita Mathematica Theoremata vel Problemata soluere, aut demonstrare, sub ea vniuersalitate sub qua proponuntur: quod minus arduum est, quam illa ipsa Problemata aut Theoremata euehere, ad maiorem, aut maximam vniuersalitatem quam admittunt. Similiter finis aliquis secundarius est, vniuersalius propositum atque demonstratum Theorema aut problema restringere, atque reducere ad minorem vniuersalitatem: qui finis secundarius, tantum cedit primario, quanto facilius est ex altiori monte descendere, quam eniti atque ascendere in montem. Via per quam ducit Logistica tota consistit in scalis generum ac specierum, per quas, à minus vniuersalibus ascenditur ad magis vniuersalia, vel à magis vniuersalibus descenditur

Fines secundarij nostræ logisticæ.

ditur ad minus vniuersalia, vel à quantitatibus alicuius generis, transitur, ad æquiualentes aliorum generum quantitates; per hanc viam iter conficitur arte syllogistica: hoc est per enthymemata & syllogismos. Exordium viæ, vt apud alios,sic apud nos desumitur ab ijs, quæ in scientijs Mathematicis appellantur principia, hoc est à definitionibus, Axiomatibus, & postulatis. Singula quæ per Logisticæ viam discurrentem iuuant, atque dirigunt ad propositum finem, vt illum, aut securius, aut compendiosius assequatur, vel in ipsa via aliter prosunt, non videntur spectare ad Logisticæ Ideam, quam hic exhibendam suscepimus: etenim singula illa huc transferre, non esset Logisticæ nostræ ideam proponere, sed ipsam Logisticam scribere, quæ nihil aliud proponit, quam, fines de quibus hactenus egimus, viam quam compendiosè exhibuimus, principia à quibus via exordium sumit, ac denique singula, quæ discursus dirigunt, aut iuuant. Ex ijs quæ discursus dirigunt, aut iuuant,nonnulla paulò post exhibebimus, in descriptione illius ideæ, cui respondent duo priores libri nostræ Logisticæ: prius enim placet hactenus dictis addere aliquas reflexiones, quæ non parum prodesse possunt ad maiorem intelligentiam nostræ Logisticæ, aut eius Ideæ.

CAPVT IV.

Proponuntur aliquæ reflexiones.

PRo sequentibus reflexionibus aduertendum, apud nos, strictam Mathesim scientiam esse,quę aliter dicitur Mathesis speculatiua. Obiectum huius scientiæ,siue illa quæ speculatur, atq; contemplatur, sunt magnitudinis concreta generica, atque specifica: etenim indiuidualia eiusmodi concreta considerare, spectat ad Mathesim practicam; stricta Mathesis, vnicè ac tota occupatur contemplandis proprietatibus, quæ conueniunt magnitudinis concretis, genericis atque specificis: ex his proprietatibus,aliquæ tantum conueniunt alicui concreto specifico, aliæ pluribus concretis specificis, aut etiam genericis communes sunt; iam vero, quæ proprietates concretis magnitudinis conueniant, & de quibus concretis magnitudinis genericis, aut specificis verificentur, examinare, atque statuere, proprium munus est strictæ Matheseos. Proprietates quas in suis concretis genericis, aut specificis cognouit stricta Mathesis, applicare ad magnitudinis concreta indiuidua, proprium officium est practicæ Matheseos. Prædictas proprietates transferre ad alia concreta,(quæ non tantum magni-

tudinis concreta sunt, sed vt ita dicam, inuoluunt magnitudinis concretum, aut mensurantur à concretis magnitudinis) officium est illius scientiæ, quæ appellatur Physico-Mathematica, & considerat concreta, quæ vltra magnitudinem abstractam inuoluunt, duritiem, fluiditatem, colorem, aut similes alias formas abstractas, sine quibus dari non possunt concreta physica, hoc est externis sensibus perceptibilia. Ex his obiter licebit aduertere, qua via à Mathesi stricta transeatur, siue ad practicam Mathesim, siue ad Physico-Mathematicam.

REFLEXIO PRIMA.

Quid sit euehere propositionem, ad maiorem, aut maximam vniuersalitatem: & quomodo ad hoc conducat via nostra Logistica.

PRopositio euehitur ad maiorem vniuersalitatem, quando ostenditur concreto magis vniuersali conuenire proprietatem, quæ prius cognoscebatur conuenire concreto minus vniuersali: quoties vero ostenditur concretum maximè vniuersale, cui conuenit proprietas in propositione affirmata de concreto minus vniuersali, tunc propositio euehitur ad maximam vniuersalitatem. Exempli gratia, Euclides Elementorum suorum libro 6. propositione prima, docet, triangula, & parallelogramma quæ eamdem habent altitudinem, habere eamdem rationem, quam habent bases. Idem de solidis parallelepipedis docet libro vndecimo propositione 32. idem de pyramidibus triangulares bases habentibus, docet propositione 5. libri 12. idem de pyramidibus multangulas bases habentibus, docet propositione 6 libri 12. iam vero triangula, & parallelogramma, sunt duo concreta specifica, contenta concreto generico, quod superficies dicitur; & parallelepipeda atque pyramides, sunt concreta specifica, contenta concreto generico, quod dicitur corpus, siue solidum. Si proprietas diuersis illis propositionibus affirmata de diuersis concretis specificis, vnica propositione simul affirmetur de omnibus illis concretis, hæc propositio, prioribus vniuersalior erit: & in hac propositione, proponentur priores, sed euectæ ad maiorem vniuersalitatem. Vt vero huiusmodi vniuersalior propositio habeatur, requiritur concretum, quod paulò ante nominatis concretis vniuersalius sit, atque illa omnia contineat: & si hoc vniuersalius concretum habeatur, atque ostendatur, prædictam proprietatem conuenire huic vniuersaliori concreto, habebuntur priores

res

res Euclideæ propositiones eue&ae ad maiorem vniuersalitatem. Huiusmodi vniuersalius concretum, in nostra via, inuenies esse illud, quod appellamus productum ex ductu eiusdem classis, singula enim parallelogramma, & parallelepipeda, sunt producta ex ductu eiusdem classis; item singula triangula, & pyramides sunt producta ex ductu eiusdem classis, atque adeo ostendendo, quod producta ex ductu eiusdem classis, habeant rationem quam habent bases, quando altitudines sunt æquales, atque ipsa producta spectant ad idem genus quantitatis, in hac propositione, habebuntur supracitatæ Euclidis propositiones, euectæ ad maiorem vniuersalitatem. Eædem propositiones erunt euectæ ad maximam vniuersalitatem, si prædicta proprietas, vel certè altera hac vniuersalior, ostendatur de concreto maximè vniuersali, cui conuenit. Ex his vt opinor, nemo non intelliget, quomodo nostra Logisticæ via, seruiat, ad propositiones euehendas ad maiorem, aut maximam vniuersalitatem, atque in hunc finem necessarias esse eas quantitatum species, atque illa genera, ex quibus composita est nostræ Logisticæ via.

REFLEXIO SECVNDA.

Quæ sint proprietates, quarum contemplatione occupatur Mathesis stricta.

IN quolibet Theoremate spectante ad strictam Mathesim aliquid asseritur de concreto magnitudinis, siue dicitur concreto magnitudinis generico, aut specifico, aliquid conuenire. Quod dicitur conuenire concreto, siue quod asseritur de illo concreto, appello proprietatem talis concreti; quare proprietates quarum contemplationi occupatur Mathesis stricta, sunt omnia & sola illa entia, de quibus Mathesis inquirit, an conueniant concreto magnitudinis: siue omnia, & sola illa entia, quæ in theorematibus affirmantur de concretis magnitudinis genericis, aut specificis; quæ entia, sunt concretorum magnitudinis abstractæ formæ, siue prædicata; huiusmodi abstractarum formarum, aut prædicatorum, vel proprietatum, considero quatuor genera diuersa, & existimo ad aliqua ex his quatuor generibus, pertinere proprietates ferè omnes quarum contemplationi occupatur stricta Mathesis. Primum genus formarum abstractarum considero constitui ab abstractis relationibus magnitudinis; per abstractam relationem magnitudinis, intelligendo illam relationem abstractam, quæ re-

requiritur, vt vnum concretum magnitudinis, poſſit intelligi maius, vel minus, altero concreto eiuſdem generis, vel certè illi æquale. Secundum genus formarum abſtractarum, conſidero conſtitui, à compoſitionibus abſtractis: per compoſitionem abſtractam intelligendo illud à quo vnum concretum magnitudinis poteſt dici hoc vel illo modo compoſitum, aut productum per additionem, ſubtractionem, ductum, vel reductum. Tertium genus formarum abſtractarum apud me conſtituitur, ab extenſionibus abſtractis: vbi per abſtractam extenſionem intelligo illud à quo vnum concretum dici poteſt hoc vel illo modo extenſum: & plura concreta magnitudinis poſſunt dici eodem, vel diuerſo modo extenſa. Quartum genus formarum abſtractarum conſtituitur, à diſpoſitionibus abſtractis: per diſpoſitionem abſtractam intelligo illud, à quo vnum concretum magnitudinis poteſt dici hoc vel illo modo diſpoſitum, cum altero concreto magnitudinis: puta non inclinatum, vel hoc aut illo modo inclinatum ad alterum. Quatuor generibus formarum abſtractarum hic enumeratis, arbitror contineri præcipuas omnes formas abſtractas, quas in ſuis concretis conſiderat Matheſis ſtricta: adeo vt in ſuis theorematibus, de aliquo concreto magnitudinis vix affirmet aliquam formam, quæ his generibus non contineatur, aut non ſit aliquid reſultans ex pluribus formis contentis his generibus: Exempli gratia, quando vnum triangulum rectilineum dicitur ſimile alteri triangulo, abſtracta ſimilitudo, quæ de triangulo affirmatur, eſt veluti aliquid reſultans ex abſtracta relatione magnitudinis rectarum linearum terminantium triangulum: quæ abſtracta relatio magnitudinis ſpectat ad primum genus formarum abſtractarum; item ex extenſione abſtracta, aut ipſius trianguli, aut terminorum eius: quæ extenſiones abſtractæ, ſpectant ad tertium genus formarum abſtractarum. Denique ex abſtracta diſpoſitione terminorum: quæ abſtracta diſpoſitio pertinet ad quartum genus formarum abſtractarum: etenim vt vnum triangulum rectilineum dicatur ſimile alteri, requiritur præcisè & ſufficit, vt ſingula latera vnius trianguli ſint proportionalia ſingulis lateribus alterius trianguli, quod fieri non poteſt, niſi habeant eamdem abſtractam relationem magnitudinis. Præterea, vt vtriuſque trianguli latera ſint recta: & vtriuſque trianguli ſuperficies ſit plana. Denique vt proportionalia vtriuſque trianguli latera, æquales angulos faciant, atque adeo ad inuicem æqualiter ſint inclinata; vel æqualiter aperta. Vt aduertas vera eſſe quæ hic diximus de triangulis ſimilibus, conſulere poſſes libri ſexti Euclidis definitionem primam. Si vlterius apud dictum authorem placeat expendere quomodo definiantur numeri ſimiles, aut duo corpora ſimilia, atque ex his definitionibus ſimilium quantitatum conclude-

cludere, quid præcisè & adæquatè requiratur atque sufficiat, ad constituendam similitudinem abstractam, à qua quoduis concretum magnitudinis, possit dici simile alicui alteri concreto: aduertes, similia dici illa concreta magnitudinis, quæ ab inuicem non aliter differunt, quam quod vnum altero maius sit aut minus; quod si verum est, etiam verum erit, inter duo magnitudinis concreta similia, nullam inueniri diuersitatem considerabilem à stricta Mathesi, distinctam à diuersitate magnitudinis talium concretorum. Præterea ex ijs quæ paulò antè diximus de triangulis rectilineis similibus, satis constat, ad illorum similitudinem requiri conuenientiam quo ad formas abstractas, primi, tertij, & quarti generis. Item ex definitione 21. libri septimi Euclidis facile colliges, requiri primi & secundi generis formas abstractas, vt aliqui numeri possint dici similes. Denique eodem modo examinando definitiones reliquas, in quibus agitur de concretis magnitudinis similibus, concludes, ad hoc vt quælibet duo concreta magnitudinis dicantur similia, sufficere, quod non differant, quo ad formas abstractas spectantes ad quatuor formarum abstractarum genera paulò antè enumerata, ex quibus formo subsequens argumentum. Inter duo concreta magnitudinis quæ appellantur similia, nulla inuenitur diuersitas considerabilis à stricta Mathesi, nisi quod vnum altero maius sit: sed vt duo concreta magnitudinis dicantur similia, sufficit, vt non aliter differant quo ad formas spectantes ad quatuor formarum abstractarum genera paulò antè enumerata, quam quod vnum concretum altero maius sit: ergo non inuenitur vlla diuersitas considerabilis à Mathesi stricta, atque distincta à forma abstracta à qua vnum concretum altero maius dicitur, quæ non habeatur à formis spectantibus ad quatuor formarum abstractarum genera, paulò antè enumerata. An argumentum hoc legitimum sit, an legitimè concludat, vel eius præmissæ prius separatim propositæ, atque hic assumptæ, veræ sint, non disputo: argumentum ideo tantum attuli, vt breuiter insinuarem aliquam causam, cur non enumerem plura quam quatuor genera formarum abstractarum, quæ in strictæ matheseos Theorematibus affirmentur de concretis magnitudinum: & ne videar hac in parte recedere à beneplacitis antiquorum. Pro maiori atque clariori intelligentia eorum quæ hic diximus, proderit subsequens reflexio, nobis non vno ex capite vtilis.



REFLE-

REFLEXIO TERTIA.

Quomodo ſtricta Matheſis conueniat cum arte ſtatuaria.

SCio Matheſim ſtrictam ſcientiam eſſe, quæ certitudine, atque infallibilitate, ſuperet naturales ſcientias omnes: maximamque diuerſitatem intercedere, inter quamlibet ſcientiam, & artem quamcunque, exiſtimo tamen non parum prodeſſe poſſe, ſtrictæ Matheſeos cum ſtatuaria arte comparationem, præſertim ijs, qui via noſtræ logiſticæ propria, aſſequi volunt, ſtrictæ Matheſeos notitiam. Conſidera ſi placet artem ſtatuariam quæ verſatur circa cretam,atque ex ſola creta efformat ſtatuas, ſiue opera ſtatuaria. Hac arte ex creta efformantur quæcunque opera ſtatuaria, additione, ſubtractione, extenſione, contractione. Hæ quatuor operationes ſtatuariæ, arti ſufficiunt, vt ex creta efformet quodlibet opus ſtatuarium: atque ſingulæ illæ operationes requiruntur ab arte, licet ſingulæ quouis in caſu neceſſariæ non ſint. Exempli gratia vt arte ſtatuaria, ex cretaceo globo efformetur Leo cretaceus: primo ſufficit, vt globo cretaceo debito modo & ordine addantur cretæ partes, debito modo extenſæ, atque terminatæ. Vel certè vt debito modo, & ordine ſubtrahantur, partes debito modo extenſæ, atque terminatæ. Tertio ſufficit vt nulla facta additione aut ſubtractione partium, debito modo & ordine extendantur, aut contrahantur partes cretæ quæ prius globum efformabant. Quarto ſufficit, vt partim addendo, vel ſubtrahendo partes, partim etiam eas extendendo aut contrahendo, efficiatur, vt ſingulæ debito modo extenſæ ſint ac terminatæ, & debito ordine cohæreant. Præterea, ſi ex globo cretaceo Leo efformandus ſit, neceſſaria erit partium additio, ſi præſcribatur conditio prohibens mutationem in partibus globum efformantibus, vel exigens Leonem maioris molis, quam ſit moles globi cretacei. Similiter partium ſubtractio neceſſaria erit, ſi præſcribatur conditio exigens Leonem minoris molis, quam ſit moles globi cretacei. Pari modo partium extenſio, atque contractio neceſſaria erit, ſi præſcribatur conditio prohibens partium globi ab inuicem ſeparationem. Strictæ Matheſi inſeruiunt quatuor diuerſæ operationes, nimirum additio, ſubtractio, ductus, & reductus: à quibus operationibus, Logiſticæ noſtræ exordium ſumimus, præmiſſis tantùm, quæ ſpectant ad ſcriptionem, quàm maioris commoditatis

ditatis gratia assumit: etenim de hac scriptione agitur capite primo libri primi Logisticæ: atque eiusdem libri capite secundo, sermo nobis est, de prædictis quatuor operationibus, quo loco ductum appellamus multiplicationem, & reductum dicimus diuisionem: præterea enumeratis quatuor operationibus addimus radicis extractionem, sed hæc non est nisi aliqua species diuisionis, aut reductionis, quemadmodum ductus à nobis nominati in epistola ad amicum, sunt diuersæ species ductuum. His breuiter prænotatis, quemadmodum paulo ante enumeratæ quatuor operationes statuariæ sufficiunt atque requiruntur, vt ex creta efformetur quoduis opus statuarium, ita etiam videtur verum, prædictas quatuor operationes Mathesi inseruientes sufficere & requiri, ad productionem cuiusuis concreti magnitudinis, ex materia ad concreti productionem necessaria, siue ex ijs circa quæ prædictæ Matheseos operationes institui possunt, quæque in Mathesi dici possent materia talium operationum, sicut creta, de qua ante egimus, est materia operationum statuariorum, quas prius enumerauimus. Indicatam inter strictam Mathesim & artem statuariam conuenientiam, pluribus non prosequor, satis enim existimo eam leuiter indicasse; illi addo alteram. Considerentur duo opera statuaria A & B constructa ex creta, atque habeant sequentes conditiones: primo vt singulis diuersis partibus operis A, respondeant operis B partes diuersæ, atque proportionales. Secundo vt illæ partes proportionales, eodem modo, per operationes statuarias, in vtroque opere A & B productæ sint. Tertio vt lineæ aut superficies, terminantes prædictas partes proportionales, eamdem habeant extensionem, puta rectam, circularem, ellipticam, aut aliaquacunque voce exprimibilem. Quarto vt lineæ aut superficies terminantes prædictas partes proportionales, easdem interse habeant dispositiones in vtroque opere A & B. Quinto vt tota extensio operis A, non sit maior neque minor, tota extẽsione operis B. Si duo opera statuaria A & B habeant prædictas quinque conditiones, ars dicetur in illis duobus operibus, bis idem, atque eodem modo produxisse: neque illa duo opera erunt interse diuersa, quo ad aliquid, quod ab arte dependet, aut consideratur ab arte: atque opera illa statuaria A & B, erunt similia, similiter producta, & etiam æqualia. Si vero desit sola quinta conditio, tunc quidem erunt inæqualia, sed tamen erunt & similia, & similiter producta: nam æqualitas operum A & B, à sola quinta conditione, adæquatè dependet. Pari modo, an sint similiter, vel non sint similiter producta, adæquatè dependet à secunda conditione: quæ si sola desit, non erunt similiter producta, adhuc tamen erunt similia, & æqualia. Denique an illa duo opera sint similia, vel non sint similia, adæquatè dependet ex prima,

ma, tertia, & quarta conditione, ex quibus si vna desit, opera illa non erunt similia.

Quod hic diximus de duobus operibus statuarijs, etiam verum est, de duobus concretis magnitudinis spectantibus ad idem genus quantitatis. Immo si rectè expendas, quæ præcedenti reflexione diximus de concretis magnitudinis, siue proprietatibus, quæ in his considerantur à Mathesi stricta, aduertes nos hic de operibus statuarijs dixisse, quæ illic dicta sunt de concretis magnitudinis. Præterea suo loco constabit, quomodo per quatuor operationes Logisticas, hoc est per additionem, subtractionem, ductum, atque reductum, produci possint quælibet quantitates, quæ à Mathesi considerantur; quemadmodum per supra memoratas quatuor operationes statuarias producuntur opera statuaria.

REFLEXIO QVARTA.

In qua notantur aliqua circa propositiones, aut propositionum demonstrationes vsitatas in stricta Mathesi.

CErtum est ab omnium conditore Deo, rationali naturæ concessas, atque immediatè infusas esse cognitiones aliquarum veritatum simplicissimarum, atque adeo euidentium, vt intellectus benè dispositus, falsam æstimare non possit propositionem, in qua huiusmodi veritas asseritur, dummodò propositionis sensum assequatur. Huiusmodi veritates dicuntur maximè siue per se notæ, à quibus multum differunt veritates, quæ non per se, sed per alias magis claras, atque patentes veritates, innotescunt. Priores veritates, vtpote maximè & per se notæ, nullo discursu assequimur: sed ex solo naturæ rationalis lumine, fiunt cognitæ: neque probari possunt, aut discursu aliquo inferri, ex alijs, quæ notiores sint, aut magis clarè pateant. Posteriores, vtpote non maximè atque per se notæ, discursu assequimur, & probari possunt, atque discursu inferri ex alijs, quæ notiores sint, & magis clarè pateant: atque non solùm lumen rationali naturæ infusum, sed huic lumini coniunctus discursus, necessitare potest intellectum, vt assensum præbeat propositioni, in qua huiusmodi veritas asseritur. Propositiones Mathematicæ asserentes aliquam veritatem, per se, siue solo lumine naturæ notam, appellantur axiomata rigorosa, si asserant aliquam veritatem speculatiuam di-

uersam

uersam à possibilitate. Verum dicuntur postulata rigorosa si asserant aliquid esse possibile, siue fieri posse. Exempli gratia propositio asserens, quod si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia: est axioma rigorosum. Propositio asserens à puncto ad punctum rectam lineam duci posse, est postulatum rigorosum. Propositio asserens aliquam veritatem speculatiuam non per se, atque solo lumine naturæ cognitam, vocatur Theorema; si verò propositio nihil asserat, sed aliquid inquirat ac petat, exempli gratia, quomodo aliquid fieri possit, vocatur problema. Principium vocatur, quod sine vlteriori probatione assumitur in discursu, quia est illud à quo discursus principium, siue exordium sumit. Hæc principia distinguuntur in rigorosa, & hypothetica. Principia rigorosa sunt definitiones, siue terminorum expositiones: item axiomata rigorosa: item postulata rigorosa. Principia hypothetica sunt Theoremata & Problemata pro principijs adhibita, siue assumpta in discursu, sed nullo legitimo discursu stabilita.

Demonstratio, est discursus in quo per syllogismos, vel enthymemata, aliqua propositio legitimè infertur ex alijs propositionibus. Demonstratio rigorosa, est demonstratio in qua nihil assumitur præter rigorosa principia, aut propositiones ex solis rigorosis principijs demonstratas. Demonstratio non rigorosa, est demonstratio in qua assumitur aliquod principium non rigorosum, aut propositio tantum ex hypothetico principio deducta. Tam rigorosæ, quàm non rigorosæ demonstrationes, aliæ dicuntur positiuæ, aliæ dicuntur negatiuæ. Demonstratio positiua appellatur in qua non infertur propositionis veritas ex eo quod cum eius falsitate connexum sit aliquid impossibile. Demonstratio negatiua est in qua infertur propositionis veritas, ex eo quod cum eius falsitate connexum sit aliquid impossibile. Inter positiuas & negatiuas demonstrationes, non solum intercedit magna diuersitas, verum etiam positiuæ demonstrationes, tantum æstimabilitate superant negatiuas, vt de Mathesi benè meriti habeantur, qui pro negatiuis antiquorum Mathematicorum demonstrationibus, positiuas substituerunt. In Euclideis elementis satis frequenter proponuntur negatiuæ demonstrationes; à me vix aliæ adhibentur quam positiuæ; quare si negatiuarum demonstrationum exempla desideras, Euclidem poteris consulere, apud quem negatiua demonstratione probatur libri primi Theorema primum, tertium, quartum, quintum, &c. vt positiuarum demonstrationum exempla habeas, poteris accipere quoduis theorema nostræ Logisticæ, aut huius ideæ.

Quantum rigorosæ demonstrationes excellentiores sint demonstrationibus non rigorosis, ex allatis definitionibus satis manifestè patet.

Non immerito dubitari poſſet, an demonſtrationes dici debeant, quæ rigoroſæ non ſunt: verum ſi ex demonſtrationum numero reijciantur illæ quæ non ſunt rigoroſæ, ſuſpicor quod facilius mihi foret, ab antiquis atque modernis Mathematicis demonſtratas propoſitiones, in vnum volumen transferendo deſcribere, quam non demonſtratas propoſitiones delere. Hoc tamen non aduerſatur prærogatiuæ certitudinis, atque infallibilitatis, qua inter cæteras ſcientias naturales excellit Matheſis: etenim propoſitiones poſſunt eſſe certæ, atque infallibiles, licet neque per ſe notæ ſint, neque rigoroſé demonſtratæ. Si ità placet, accipe quamlibet ex aſſertionibus vniuerſalibus à me propoſitis in Theoremate primo appendicis libri ſecundi Logiſticæ, & neglecta demonſtratione quæ illic affertur, pro valore litterarum A & B ſume pro libitu quoſcunque duos numeros vulgares, atque exponendo vtramque æquationis partem, aduerte, vtrum æquales ſint: ſi hoc modo diuerſos ſemper numeros aſſumendo pro valore litterarum A & B, ſemper inuenias ambas æquationis partes interſe æquales eſſe, hac experientia ſatis certo atque infallibiliter conſtabit aſſertionis veritas: tamen per iteratam huiuſmodi experientiam, aſſertio non erit demonſtrata, ſed reddi poteſt tam certa atque infallibilis, quam certum atque infallibile eſt lignum comburi ab igne, ſolis radios calorem producere, ex eadem arbore generari folia, flores & fructus, &c. quæ veritates nulla demonſtratione ſtabilitæ ſunt, ſed non aliter quam multiplici experientia comprobatæ, numerantur inter veritates adeo certas atque infallibiles, vt facilius inuenies, qui ipſa rigoroſa principia Matheſeos in dubium reuocet, quam qui circa dictas, aut his ſimiles veritates, dubitationem admittat.

CAPVT V.

Proponitur Ideæ Logiſticæ pars, cui reſpondent duo priores libri noſtræ Logiſticæ.

VEnio nunc ad Logiſticæ noſtræ ideam aliquam partialem, hoc eſt ad illam ideam cui reſpondent duo priores libri noſtræ Logiſticæ. In his libris potiſſimum conſideramus, duo quantitatum genera, nimirum quantitatem diſcretam, atque vniuerſalem; etenim priores illi duo libri ad tyrones ſcripti ſunt, quibus ante omnia videbatur proponenda conſideratio diſcretæ quantitatis, quæ minores difficultates annexas habet; & etiam ex eo capite commodior eſt, atque tractabilior, quod ab ipſa infantia numeris aſſueti, facilius percipian-

tur

tur discretæ, quam reliquæ quantitates; atque tunc clarissimè intelligantur quantitatum proportiones, quando in numeris proponuntur. Discretæ quantitatis considerationi, addo considerationem quantitatis vniuersalis, vt sic doceam, saltem ad vnum alterumue passum ascendere, aut descendere per eam viam, quam supra diximus propriam esse nostræ Logisticæ. In prædictis duobus prioribus libris nostræ Logisticæ, consideramus tres diuersorum numerorum classes, nimirum numeros vulgares, denominatos, & radicales: quæ tres classes numerorum, sunt tres diuersæ species discretarum quantitatum, in quas adæquatè diuiditur discreta quantitas, pro vt hic consideratur; adeo vt idem significetur quando dicitur quilibet numerus, & quando dicitur cuiusuis classis numerus. Cuiusuis classis numeri vlterius subdiuiduntur in alias species, puta in positiuos & negatiuos, atque has & alias numerorum species definitas habes in dictis libris. Ex his discretarum, aut etiam vniuersalium quantitatum diuersis speciebus, atque ex duobus quantitatum generibus: nimirum ex quantitate discreta & vniuersali, composita est scala, siue via, prioribus libris conueniens; eorumdem librorum finis primarius, alius non est, quam problemata aut theoremata Arithmetica euehere ad eam vniuersalitatem quam admittunt. Ex secundarijs finibus vnus est, Arithmetica problemata aut theoremata, arte syllogistica soluere aut demonstrare, sub ea vniuersalitate sub qua proponuntur. Alter finis secundarius est, problemata conuertere in Theoremata. Vt ad hos propositos fines commodè deducam tyrones, prius aggredior solam solutionem problematum quæ in numeris vulgaribus proponuntur, & doceo hanc solutionem inferre arte syllogistica. Deinde ostendo, quomodo illa problemata ad vulgares numeros restricta, euehantur ad maiorem vniuersalitatem. Denique trado quomodo ex illis vniuersalioribus problematibus eruantur theoremata eamdem vniuersalitatem habentia, atque sub tali vniuersalitate demonstrentur. Habes hic fines nobis propositos in duobus primis Logisticæ libris: habes etiam scalam, siue viam, per quam pergimus ad propositos fines; vt verò distinctius appareant reliqua, quæ per hanc viam properantem iuuant, obseruari potest, quod capite nono libri primi Logisticæ proponatur modus maximè vtilis instituendi discursus, vt per illos inferatur solutio problematis quæ desideratur. Hunc modum instituendi discursus logisticos, appellamus regulam Logisticæ, quia dirigit tales discursus. Media maximè vtilia, pro instituendis Logisticis discursibus, continentur octo prioribus capitibus eiusdem libri primi, & sunt illa quæ hic sequuntur. Primo, modus legendi quoslibet numeros Logistica scriptione expressos. Item modus repræsentandi Logistica scriptione

quoslibet numeros. Vbi logistica scriptio appellatur, illa, quam nobis placuit assumere pro nostra logistica. Hæc singula habes capite primo nostræ Logisticæ. Secundo, modus Logisticè scribendi productum quod nascitur ex additione, subtractione, multiplicatione, aut diuisione, quorumlibet duorum numerorum logisticorum. Item modus scribendi, quamlibet, cuiusuis numeri radicem, hæc docentur capite secundo libri primi. Tertio, modus reducendi Logisticas scriptiones longiores aut minus commodas, ad alias scriptiones logisticas, idem, breuius aut commodius repræsentantes. Hoc partim habes capite tertio libri primi, partim etiam in appendice libri primi. Omnia tamen citatis locis non afferuntur quæ ad talem reductionem prodesse poterant: timebam enim ne multitudine tyrones obruerem potius, quam iuuarem. Quarto, modus transferendi quemuis numerum ex vna æquationis parte ad partem oppositam, non tamen vitiata æquatione. Hanc numerorum transpositionem vocamus Antithesim, pro qua capite quarto libri primi afferimus quæ tyronibus videbantur sufficere. Quinto, modus reducendi æquationes longiori scriptione logistica exhibitas, ad alias, exhibitas breuiori, aut commodiori scriptione; de quo agitur capite quinto libri primi. Sexto, modus resoluendi, siue exponendi numeros denominatos aut radicales, hoc est numerorum denominatorum aut radicalium reductio ad vulgares numeros; de quo agitur capite sexto libri primi. Septimo, modus resoluendi æquationes: de quo agitur capite septimo libri primi: vbi tamen rigorosas resolutiones non afferimus, nisi pro simplicibus æquationibus. Pro aliquibus æquationibus compositis seruientem rigorosam resolutionem, habes in quarta parte epistolæ ad amicum scriptæ. Octauo principia inseruientia discursibus Logisticis agẽtibus de quantitate discreta aut vniuersali, & nonnullæ propositiones, potissimum vtiles, vt ex æquatione consistente inter duas proportiones, inferatur æquatio consistens inter duas quantitates. Aut vicissim, ex æquatione consistente inter duas quantitates, inferatur æquatio consistens inter duas proportiones. Hęc proponitur capite octauo libri primi Logisticę, quo loco plura principia non videbãtur necessaria pro duobus prioribus libris, nisi fortassis illa quę facile haberi poterãt ex nostris elementis Geometriæ planæ. Media hactenus enumerata, atque seruientia, pro discursibus Logisticis: subsequitur Logisticæ regula, ipsos discursus dirigens. Post hæc libro secundo proponuntur varia problemata, siue exempla, in quibus apparet, quomodo prædicta regula logisticos discursus dirigat, & pro talibus discursibus seruiant media paulò antè enumerata. In hunc modum traditis quæ tyronibus sufficiunt ad finem illum secundarium, qui consistit in solutione problematum, quæ

in numeris vulgaribus propoſita ſunt, pergimus ad finem primarium, atque problemata prius propoſita in numeris vulgaribus, docemus euehere ad maximam vniuerſalitatem,quam admittunt; in quem finem tria problemata libro ſecundo propoſita in numeris vulgaribus, reſumuntur in appendice eiuſdem libri pagina 87. & 88, quo loco illa propono, & ſoluo ſub maxima vniuerſalitate quam admittunt. Experientia didici Logiſticæ noſtræ ſtudioſis, prædicta tria problemata vniuerſalia abundè ſufficere: vt reliqua problemata libro ſecundo propoſita,atque ad vulgares numeros reſtricta,euehant ad eamdem vniuerſalitatem: atque ita in Logiſticæ via, ad aliquot paſſus ambulare diſcant. Paulò antè memoratis tribus problematibus vniuerſalibus, addo totidem theoremata vniuerſalia, quæ ipſis problematibus reſpondent, hæc theoremata imitando, non difficulter ex ſingulis problematibus, ad maximam vniuerſalitatem euectis, theoremata deducunt: atque illa ſub eadem vniuerſalitate demonſtrant. Ex magis vniuerſalibus theorematibus, deſcenſus ad ea quæ magis reſtricta ſunt, minorem habet difficultatem: talem deſcenſum aduertere poteris, in ſingulis ſolutionibus problematum libri ſecundi, in quibus citantur; atque aſſumuntur theoremata appendicis eiuſdem libri. Hactenus dicta ſufficient pro expoſitione illius ideæ particularis, oui ante diximus correſpondere duos priores libros noſtræ Logiſticæ,in qua idea obſeruari cuperem, quam facilis tranſitus ſit à problematibus ad vulgares numeros reſtrictis, ad problemata vniuerſalia, vel etiam ad vniuerſalia theoremata, atque adeo quam commoda ſit illa pars,viæ noſtræ Logiſticæ, quæ ſpectat ad hanc particularem ideam,reliquæ partes eiuſdem viæ mihi non videntur magis difficiles, ſed longe magis vtiles, vt facile apparebit ex ſubſequentibus partibus ideæ noſtræ Logiſticæ.



IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS SECVNDA.

ARGVMENTVM.

PRoponuntur varia principia magis propriè seruientia tradendis in sequentibus partibus, nimirum definitiones, axiomata, postulata, atque hypotheses. His adduntur quæ ad pleniorem singulorum intelligentiam videntur conducere. Præterea Mathematicam quantitatem prius diuidendo in genera; ac deinde ipsa genera subdiuidendo in aliquas species, siue diuersarum quantitatum classes, præparo scalam compositam ex diuersis quantitatum generibus & speciebus; qua scala, tanquam via vtitur nostra logistica, vt discurrendo, à minus vniuersalibus ad magis vniuersalia ascendat: vel à magis vniuersalibus descendat ad minus vniuersalia: vel à quantitate vnius generis, perueniat ad æquiualentem alterius generis quantitatem.

CAPVT PRIMVM.

Quantitas Mathematica diuiditur in sex diuersa quantitatum genera.



Vantitas Mathematica (hoc est quantitas de qua agit Mathesis stricta, & à nobis sine vlla restrictione quantitas appellatur) est concretum magnitudinis. Circa hanc definitionem si plura desideras, consulere poteris præcedentem partem, vel appendicem libri secundi nostræ Logisticæ; Vbi etiam inuenies, quæ hic videri possent, deesse, ad plenam intelligentiam quantitatum, ex quibus constituuntur singula genera quæ enumeramus; Etenim sex diuersa quantitatum genera admittimus, quorum primum amplectitur omnes, & solas quantitates vniuersales. Quantitas vniuersalis est concretum magnitudinis non restrictum. Quantitas primi generis, siue vniuersalis,

lis, diuiditur in quantitatem discretam, & in quantitatem continuam. Quantitas discreta est concretum discretionis. Quantitas continua est concretum extensionis. Secundum genus quantitatis amplectitur omnes, & solas quantitates discretas: quia discreta quantitas vlterius non subdiuiditur in diuersa genera discretarum quantitatum. Tertium genus quantitatis amplectitur omnes, & solas quantitates continuas non restrictas: quia quantitas continua subdiuiditur in diuersa genera quantitatum continuarum: nimirum in lineas, superficies, & corpora siue solida. Linea dicitur quantitas continua habens vnicam extensionem: siue concretum longitudinis. Superficies dicitur quantitas continua habens duas extensiones, sed non plures: siue concretum longitudinis & latitudinis. Corpus siue solidum, est quantitas habens triplicem extensionem: siue concretum longitudinis, latitudinis, atque altitudinis. Quartum genus quantitatis amplectitur omnes & solas lineas. Quintum genus quantitatis amplectitur omnes & solas superficies. Sextum genus quantitatis amplectitur omnia & sola corpora, siue solida. Circa voces longitudo, latitudo, altitudo, aduertendum illas voces subinde intelligi in concreto, sic vt longitudo idem significet, ac concretum longitudinis: & similiter latitudo, vel altitudo, idem sit, ac concretum latitudinis, vel altitudinis. Subinde prædictæ voces sumuntur in abstracto, vt longitudo sit illud à quo aliquid dicitur longum; Et similiter latitudo, vel altitudo sit illud à quo aliquid dicitur latum, vel altum. Voces illæ sumuntur in concreto, quando dicitur exempli gratia, quod superficiei, aut corporis longitudo, vel latitudo sit linea, vel æquetur lineæ. Prædictæ voces sumuntur in abstracto, quando dicitur exempli gratia, quod superficies, vel corpus habeat longitudinem, vel latitudinem. Quando ex ipsa loquutione satis patet, an dictæ voces intelligendæ sint in concreto, vel abstracto, non est necesse id vlterius declarare: hinc nos in definitione lineæ, in qua dicimus lineam esse concretum longitudinis, non addimus, quod sit concretum longitudinis abstractæ: id enim ex ipsa loquutione satis patet; quando ab alijs definitur linea, dicendo quod sit longitudo latitudinis expers: ex ipsa loquutione non constat, an de abstracta, vel de concreta longitudine affirmetur, quod sit linea; qua de causa nobis non placet hic loquendi modus æquiuocationi expositus. Æquiuocatio tolleretur dicendo, quod linea sit concreta longitudo, expers latitudinis. Et quoniam maximè abhorremus æquiuocationes in singulis loquutionibus, & præsertim in definitionibus, requirimus illa quæ sufficiunt ad tollendas æquiuocationes: ne tamen tam iusta nostra petitio, nimium aduersaretur loquendi modis

modis in Mathesi passim vsitatis: prædictis vocibus, alijsque similibus, duplicem sensum concedimus, vt non minus intelligi possint in sensu concreto, siue vt concretum significent, quam in sensu abstracto, siue vt significent solam concreti formam: & tantum petimus, vt non adhibeantur nisi in circumstantijs, ex quibus satis constet, quo sensu intelligendæ sint, nisi fortè planè indifferens sit, quo sensu intelligantur: quæ exceptio, locum non habet in definitione lineæ, quæ asserit, quod linea sit longitudo expers latitudinis: sic enim per lineam intelligi posset abstracta longitudo: quo posito, qui ex superficie tolleret ipsius supeficiei lineam, ex superficie tolleret abstractam longitudinem superficiei: sed qui ex superficie tolleret abstractam longitudinem superficiei, faceret vt superficies desineret esse superficies: ergo qui ex superficie tolleret superficiei lineam, faceret quod superficies desineret esse superficies. Quis Mathematicorum tam absurdum consequens admittet, & consequenter concedet, partem quæ relinquitur quando superficiei medietas aufertur, non esse superficiem: & alia similia quæ hinc sequuntur, quæque hic breuiter insinuasse satis erit, pro ijs, quibus fortassis prima fronte non arridebunt nostra concreta toties replicata, atque apud alios parum vsitata in rebus Mathematicis. Cæterum hic quas possum controuersias declino, illæ enim pertinent ad librum quartum nostræ Logisticæ. Circa voces longitudo, latitudo, altitudo, etiam aduertendum, certum esse, dari non posse plures quam tres diuersas extensiones abstractas, quarum prima sit abstracta extensio in longum. Secunda sit abstracta extensio in latum. Tertia sit abstracta extensio in altum siue profundum. Dico in altum siue profundum, nam si extensio à termino A vsque ad terminum B, est extensio in altum, etiam extensio à termino B vsque ad terminum A, erit extensio in profundum: Et sic extensio in altum, non aliter differt ab extensione in profundum, quam linea A B, differat à linea B A: & sicut linea A B est planè eadem cum linea B A, sic extensio in altum est planè eadem cum extensione in profundum. Ex prædictis tribus extensionibus abstractis, quælibet indifferens est, vt vocetur longitudo, latitudo, vel altitudo, Idem verum est de concretis, quæ
Fig. 1. singulis respondent. Quare si in rectangulo A B C, placeat A B vocare longitudinem rectanguli, tunc B C, vel dici poterit rectanguli latitudo, vel etiam poterit dici rectanguli altitudo. Si verò placeat A B vocare rectanguli latitudinem, tunc B C poterit dici longitudo rectanguli, vel etiam poterit dici altitudo rectanguli; Et parum, aut nihil refert, quis loquendi modus adhibeatur, dummodo ex tribus diuersis extensionibus iam enumeratis, singulæ quæ interse diuersæ

sunt

ſunt, etiam diuerſis vocibus exprimantur: atque ſuppoſito exempli gratia, quod rectanguli A B C longitudo ſit A B, tunc altera rectanguli extenſio B C non appelletur longitudo.

CAPVT II.

Explicatur quid ſit valor quantitatis, à quo, duæ quantitates dicuntur æquiualentes inter ſe: & quomodo vna quantitas, reuocetur ad quantitatem alterius generis, priori quantitati æquiualentem.

QVamlibet quantitatem eſſe concretum magnitudinis, ſatis conſtat, tum ex ipſis quantitatum definitionibus, tum ex iis, quæ de quantitate diximus præcedenti capite. Per valorem quantitatis A, intelligimus quantitatem vniuerſalem, quæ inuenitur in quantitate A. Hinc dicimus, duas diuerſi, vel eiuſdem generis quantitates, habere eumdem valorem, quando duæ illæ quantitates habent eamdem, ſiue æqualem quantitatem vniuerſalem. Quemadmodum in quouis homine, & in quouis bruto, inuenitur illud quod dicitur animal: ſic in quauis quantitate, ſecundi, tertij, quarti, quinti, aut ſexti generis inuenitur quantitas vniuerſalis. Exempli gratia in linea inuenitur quantitas vniuerſalis, quandoquidem linea dici poſſit quantitas vniuerſalis reſtricta ad quantitatem habentem vnicam extenſionem: ſicut homo dici poteſt, animal reſtrictum ad animal habens rationalitatem. Similiter in quouis numero inuenitur quantitas vniuerſalis; Et numerus dici poteſt quantitas vniuerſalis reſtricta per abſtractam diſcretionem: ſicut brutum poteſt dici animal reſtrictum per abſtractam irrationalitatem. Quantitatem vnius generis reuocare ad æquiualentem alterius generis quantitatem, nihil eſt aliud quam vnius generis quantitati conuenientem magnitudinem vniuerſalem, reſtringere per formam abſtractam, ac propriam quantitati alterius generis. Exempli gratia, lineam, reuocare ad numerum, lineæ æquiualentem, nihil eſt aliud, quam quantitatem vniuerſalem, quæ in linea inuenitur, reſtringere per abſtractam diſcretionis magnitudinem: ſiue quantitatem vniuerſalem, quæ in linea conſideratur reſtricta per abſtractam longitudinem, conſiderare reſtrictam per abſtractam diſcretionem.

Considera si placet, in quouis homine, & quouis bruto, inueniri illud quod dicitur animal; similiter in quauis continua, & in quauis discreta quantitate, inuenitur illud quod dicitur quantitas vniuersalis; & in quouis baculo recto, ac curuo, inuenitur illud quod dicitur baculus. Iam verò licet equus A, non posfit dici maior equus, quam sit homo B: tamen illud quod dicitur animal, & inuenitur in equo A: potest dici maius animal, quam sit animal, quod inuenitur in homine B. Pari modo, numerus C non potest dici maior numerus, quam sit superficies D: sed tamen illud quod dicitur quantitas vniuersalis & inuenitur in numero C, potest dici maior quantitas vniuersalis, quam quantitas vniuersalis quæ inuenitur in superficie D. Similiter baculus rectus E, non potest dici maior baculus rectus, quam sit baculus curuus F: tamen illud quod dicitur baculus, & inuenitur in baculo recto E, potest dici maior baculus, quam sit baculus qui inuenitur in baculo curuo F. Quando equus A, dicitur maior equus quam sit homo B: asseritur quod homo sit equus, & quia homo non potest esse equus, impossibile est, quod equus, sit maior equus, quam homo. Verum quando animal quod inuenitur in equo, dicitur maius animal, quam animal quod inuenitur in homine: asseritur quod in equo, & in homine inuenitur animal, quodque animal illud quod in equo inuenitur, sit maius, animali, quod inuenitur in homine: quæ singula sunt possibilia, adeoque assertio non inuoluit aliquid impossibile, sed potest esse vera; eodem modo, quando numerus C, dicitur maior numerus, quam superficies D: asseritur quod superficies D, sit numerus: & quia impossibile est superficiem esse numerum: etiam dici non potest, quod numerus C, sit maior numerus, quam superficies D: verum quando quantitas vniuersalis quæ inuenitur in numero C, dicitur maior quantitate vniuersali quæ inuenitur in superficie D: sensus est, quod in numero C, & in superficie D, inueniatur quantitas vniuersalis: quodque illa quantitas vniuersalis quæ inuenitur in numero C, sit maior, quantitate vniuersali quæ inuenitur in superficie D. Quæ singula sunt possibilia, adeoque assertio non inuoluit aliquid impossibile, & potest esse vera. Apud Mathematicos licitum non est asserere, quod numerus C, sit maior superficie D: id enim omninò falsum est, atque impossibile; apud alios tamen inusitatum non est, asserere, quod equus A, sit maior homine B. Item quod baculus rectus E, sit maior curuo baculo F; causa hæc est, quia assertio in qua dicitur quod numerus C est maior superficie D, apud Mathematicos, planè æquiualet assertioni in qua dicitur, quod numerus C, sit numerus maior quam superficies D: nec alium sensum admittit: & quia hoc sensu falsa

falsa est, vt paulò ante diximus, apud Mathematicos nullo modo verum esse potest, quod numerus C sit maior superficie D. Similiter apud Mathematicos verum esse non potest quod numerus C, sit minor superficie D, vel illi æqualis. Apud alios non vnum tantum, sed duplicem sensum admittit, assertio in qua dicitur, quod equus A sit maior homine B: & hæc assertio indifferens est vt significet, vel equum A esse maiorem equum, quam sit homo B: vel certè animal, quod in equo A inuenitur, esse maius animali, quod inuenitur in homine B; & licet assertio priori sensu falsa sit, tamen quia posteriori sensu vera esse potest, etiam admittitur inter assertiones, quæ possunt esse veræ. Hæc si vera sunt, quæ existimo à Mathematico negari non posse, infero, igitur apud Mathematicos non inuenitur modus, comparandi inter se duas diuersi generis quantitates: exempli gratia numerum & superficem: licet apud non Mathematicos inueniatur modus comparandi inter se, duo diuersi generis animalia: exempli gratia equum, & hominem: idque ea comparatione, quæ Mathematicis magis propria est, & ex qua resultat, vnum dici altero maius, vel minus, vel illi æquale. Quid ad hoc alij responderent mihi cognitum non est. Si cum alijs quam Mathematicis agerem, responderem, à Mathematicis materialiter sumptis, etiam intelligi propositiones, tam in sensu formali, quàm in sensu materiali; sed à Mathematicis formaliter sumptis, non intelligi propositiones Mathematicas, nisi in sensu formali: atque ab his inter falsas propositiones numerari, illas omnes, quæ tantum in sensu materiali veræ sunt. Vt retineam, atque obseruem hunc vsum Mathematicorum, & per propositiones tantum in sensu formali intellectas, exprimam veritates, quas alij significant per propositiones intellectas in sensu materiali, seruiunt mihi quantitates, quas æquiualentes appello, quasque hic exposui. Mathematicis respondeo, nostræ Logisticæ non deesse prædictas comparationes: etenim quantitates quas exposui, atque æquiualentes appellari volui, mihi vsui sunt, vt quoties iuxta aliorum principia mihi cummunia, addi, subtrahi, multiplicari, diuidi, aut inter se comparari non possunt, duæ eiusdem, vel diuersi generis quantitates, tamen eumdem fructum assequar, quem referrem ex tali additione, subtractione, multiplicatione, diuisione, aut comparatione. Quis verò, & quanti momenti fructus ille sit, suo loco patebit: hic tantum exponendas suscepimus nostras quantitates æquiualentes, quas subministrat quantitatum diuersarum scala Logisticæ nostræ propria. Dari quantitates quæ addi non possint, manifestum est: tales sunt superficies A, & linea B. Etenim iuxta principium asserens omne totum esse maius sua parte, manifestum est A † B esse

aliquid maius quam A, vel certè A † B non eſſe productum ex additione duarum quantitatum A & B: atqui ſuppoſito quod A ſignificet ſuperficiem, & quod B ſignificet lineam, etiam manifeſtum eſt A † B non eſſe aliquid maius, quam A: ergo ſuppoſito quod A ſignificet ſuperficiem & quod B ſignificet lineam, A † B non eſt productum ex additione duarum quantitatum A & B; ergo ſuperficies A, & linea B, ſunt quantitates, quæ addi non poſſunt ea additione, quæ per vocem additio ſignificatur à Mathematicis. Idem patet de ſubtractione: quia ſuppoſito quod A ſit ſuperficies, & B ſit linea, tunc ex ſuperficie A auferendo lineam B, non relinquitur aliquid minus quam A, adeoque ſubtractione Mathematica, ex ſuperficie A non poteſt auferri linea B. Ex his ſatis conſtat dari quantitates, quæ addi, aut ſubtrahi non poſſunt, additione, aut ſubtractione Mathematica, de qua ſola nobis ſermo eſt, quando additionem, aut ſubtractionem nominamus, pari modo dari quantitates, quarum vna in alteram duci non poſſit, conſtabit ex ijs quæ hic addo de ductibus.

CAPVT III.

Proponuntur ſex ductus nominati, quorum vnus eſt Arithmeticus, alij ſunt Geometrici, & explicatur quomodo ductus Arithmeticus pro alijs omnibus quantitatibus vtilis ſit, licet hoc ductu, neque duci, neque produci poſſit alia quantitas, quam diſcreta.

MVltiplicationes, ſiue ductus Mathematicos, diſtinguo in ductus nominatos, & in ductus innominatos. Ductus nominati ſunt, qui in noſtra Logiſtica proprium nomen habent. Ductus innominati dicuntur, qui non habent proprium nomen. Ductus nominatos, diuido in ductus Arithmeticos, & Geometricos. Ductus Arithmeticus eſt, cuius productum eſt quantitas diſcreta. Ductus Geometricus eſt, cuius productum eſt quantitas continua. Solum ductum Arithmeticum indicat hæc ſcriptio A *in* B qualeſcunque fuerint quantitates A & B. Ab hac ſcriptione tot diuerſas alias ſcriptiones adhibeo, quot ductus Geometricos enumero, hoc eſt quinque diuerſas ſcriptiones, quia vniuerſim propono quinque diuerſos ductus Geometricos; his ductibus

bus Geometricis, nomina attribuo, desumpta ab ordine quo à me enumerantur. Primum ductum Geometricum indicat hæc scriptio, A *in* B ductu 1. quæ legitur A *in* B ductu primo. Secundus ductus Geometricus significatur hac scriptione, A *in* B ductu 2. quæ legitur A *in* B ductu secundo. Tertius ductus exhibetur hac scriptione, A *in* B ductu 3. quæ legitur A *in* B ductu tertio. Quartus ductus repræsentatur hac scriptione, A *in* B ductu 4. quæ legitur A *in* B ductu quarto. Denique pro quinto ductu, seruit subsequens scriptio, A *in* B ductu 5. quæ scriptio legitur, A *in* B ductu quinto. In singulis his quinque ductibus Geometricis, litteræ A & B, significant quantitates continuas: verum quas quantitates continuas repræsentare possint: præterea quid sint illi ductus Geometrici, vel quales quantitates producant, intelliges ex sequentibus. Vsitatum est apud Geometras, intelligere, quantitatem continuam produci ex motu, aut fluxu: sic apud ipsos linea producitur ex motu aut fluxu puncti, quod in longum mouetur. Similiter superficies generatur ex motu aut fluxu lineæ, quæ in latum defertur. Denique corpus producitur ex motu aut fluxu superficiei, quæ in altum assurgit. Vt has quantitatum, ac præsertim superficierum ac corporum geneses, atque Geometricas productiones, vtiles reddam pro nostra Logistica, simplicem puncti motum appello, quo punctum tantum defertur, per rectam aut per circularem lineam. Præterea intelligo quantitatem continuam, simplici, siue vnico motu tantum vehi: Quando singula illius quantitatis puncta simplici motu, atque æquali velocitate deferuntur. Quantitatem continuam simplici, siue vnico motu tantum rotari intelligo, quando singula illius quantitatis puncta, non nisi simplici motu deferuntur, sed tamen non deferuntur æquali velocitate. Exempli gratia si recta linea A B, insistens alteri rectæ lineæ A D, moueatur ex A vsque in D, ita vt singula puncta rectæ A B non deferantur nisi per rectas lineas: tunc recta linea A B simplici motu tantum vehitur per rectam A D. Si recta linea A B, circumagatur circa punctum A, ita vt singula puncta rectæ A B, non moueantur nisi per lineas circulares: Tunc recta A B dicetur simplici motu tantum rotari. Quantitas continua quæ simplici motu, tantum vehitur aut rotatur, vel vehitur aut rotatur secundum extensionem quam habet: vel secundum extensionem quam non habet. Exempli gratia superficies plana A B E in longum & latum extensa est: quare vehetur aut rotabitur secundum extensionem quam habet, si vehatur aut rotetur secundum longitudinem aut latitudinem: hoc est si singula puncta superficiei A B E maneant in illa superficie producta. Superficies plana A B E, vehetur aut rotabitur secundum extensionem quam non habet, si vehatur aut rotetur secundum altitudinem: *Fig.* 1.

dinem: hoc est si singula puncta superficiei A B E non maneant in illa superficie producta. Quantitas continua quæ tantum vehitur aut rotatur secundum extensionem quam habet, non potest intelligi, per hunc motum acquirere extensionem nouam, siue diuersam ab extensionibus quas habet. Quantitas continua quæ tantum vehitur aut rotatur secundum extensionem quam non habet, potest intelligi, hoc motu acquirere nouam extensionem: atque adeo quodammodo extendi secundum illam extensionem nouam, atque diuersam ab extensionibus quas habebat. Quare datur motus quo quantitas simplici motu tantum vecta vel rotata, intelligi potest acquirere nouam extensionem: & talis est motus quo quantitas simplici motu tantum vehitur aut rotatur secundum extensionem quam non habet. Præterea datur motus quo quantitas simplici motu tantum vecta aut rotata, non potest intelligi acquirere nouam extensionem: & talis est motus quo quantitas simplici motu tautum vehitur aut rotatur secundum extensionem quam habet. His prænotatis. Ductus Geometricus dici potest acquisitio nouæ extensionis, facta mediante motu; & quantitas X dicetur Geometricè duci in lineam Z: quando quantitas X mouetur, vt acquirat nouam extensionem, siue altitudinem lineæ Z. Quando quantitas X ducta in lineam Z intelligitur producere quantitatem R, dici potest, quod quantitas R nihil aliud sit, quam quantitas X extensa per altitudinem Z; similiter dici potest quod quantitas X, nihil aliud sit, quam quantitas R contracta per altitudinem Z; etenim quemadmodum quantitas X, ducta, siue extensa per altitudinem Z, producit quantitatem R: ita etiam quantitas R, contracta, siue reducta per altitudinem Z, producit quantitatem X. Exempli gratia, supposito quod recta linea A B, ducta in rectam lineam A D, producat
Fig. 1. rectangulum A B C D, per hoc quod recta A B moueatur vsque in D C: hoc casu linea recta A B, intelligitur mediante motu, quodammodo in altum extendi, atque acquirendo altitudinem A D, quam prius non habebat, constituere, siue producere rectangulum A B C D, extensum per longitudinem A B, & etiam extensum per altitudinem A D. Similiter intelligi potest quod rectangulum A B C D mediante motu, secundum altitudinem suam, quodammodo contrahatur, atque deperdendo altitudinem suam A D, quam prius habebat, non retineat nisi suam longitudinem A B: atque adeo hoc motu producat lineam A B, tantum extensam in longum: & quemadmodum per ductum Geometricum significamus acquisitionem nouæ extensionis factam mediante motu, sic per reductum Geometricum significamus amissionem extensionis quæ inueniebatur in eo quod reduci dicitur. Hinc reductus Geometricus dici potest amissio propriæ alicuius extensionis facta

facta mediante motu: & quantitas R dicetur reduci per lineam Z, quando quantitas R mouetur, vt amittat suam extensionem, siue altitudinem lineæ Z quam habebat. Reductuum Geometricorum, apud nos rarior est vsus, quam Geometricorum ductuum: hinc seorsim expono quinque ductus nominatos, atque Geometricos: in quibus quantitas quæ ducitur vocatur basis: & quantitas in quam basis ducitur vocatur altitudo. Præterea in his quinque ductibus Geometricis, basis non est nisi plana superficies, vel linea cuius omnia puncta sint in eodem plano: quod planum à me appellatur planum basis. Altitudo in quam basis ducitur, semper est linea: quia tamen hæc linea potest esse recta, vel circularis: etiam altitudo in quam basis ducitur, à me distinguitur in rectam altitudinem, & circularem altitudinem. Per rectam altitudinem intelligo extensionem lineæ rectæ, quæ est perpendicularis ad planum basis quæ ducitur. Per circularem altitudinem, significo extensionem lineæ circularis, per quam defertur basis punctum, quod maximè remotum est ab axe circa quem basis rotatur. Denique basis quæ vnico motu ducitur in rectam altitudinem, à nobis dicitur vniformiter decrescere, quando basis in ipso ductu ita contrahitur, aut decrescit, vt extrema baseos puncta, non deferantur nisi per rectas lineas. His prænotatis, expono quinque ductus Geometricos nominatos: & indico aliquas continuas quantitates, quæ ex his ductibus generantur.

Ex Geometricis ductibus, primus dicitur, in quo basis A B, quæ sit plana superficies, vel linea cuius omnes partes sint in eodem plano, vnico motu tantum vecta, per rectam altitudinem, assurgit in altitudinem rectam C D. Hoc primo ductu, producuntur rectangula plana, ex basi quæ sit vecta linea. Item rectangula curua, ex basi quæ sit curua linea. Item parallelepipeda recta, ex basi quæ sit planum parallelogrammum. Item Prismata recta, ex basi quæ sit superficies plana atque rectilinea. Item prædictorum corporum superficies laterales, ex circumferentia basium, quæ generant dicta corpora. Item tot alia corpora diuersa, quot dari possunt superficies planæ, atque diuersæ, à basibus hic enumeratis: quæ superficies, ductu primo, producunt corpora: & insuper superficierum circumferentiæ, ductu primo, producunt corporum superficies laterales.

Secundus ductus vocatur in quo basis A B, quæ sit plana superficies, vel linea cuius omnes partes sint in eodem plano, vnico motu tantum vecta per rectam lineam X Z, diuersam ab altitudine recta, assurgit in rectam altitudinem C D. Hoc secundo ductu producuntur parallelogramma plana non rectangula, ex basi quæ sit recta linea. Item parallelogramma curua non rectangula, ex basi quæ sit

curua

curua linea. Item parallelepipeda non recta, ex baſi quæ ſit planum parallelogrammum. Item Priſmata non recta, ex baſi quæ ſit ſuperficies plana, & rectilinea. Item cylindri non recti, ex baſi quæ ſit ellipſis. Item tot alia corpora diuerſa, quot dari poſſunt ſuperficies planæ, diuerſæ à baſibus hic enumeratis.

Nota, quod in primo & ſecundo ductu baſis quæ vehitur non decreſcat dum vehitur, oppoſitum accidit in tertio ductu.

Tertius ductus appellatur, qui à primo, vel ſecũdo ductu, non differt, niſi quod baſeos AB quæ vehitur, vna, vel duplex extenſio vniformiter, ac tota decreſcat, eo tempore quo recta aſſurgit in altitudinem C D. Hoc tertio ductu generantur triangula plana & rectilinea, ex baſi quæ ſit recta linea. Item triangula curua, ex baſi quæ ſit curua linea. Item priſmata triangularia, ex baſi quæ ſit parallelogrammum. Item pyramides, ex baſi quæ ſit figura plana, & rectilinea. Item coni ex baſi quæ ſit circulus, vel ellipſis. Item pyramidum rectarum, & conorum rectorum ſuperficies laterales. Denique tot alia corpora diuerſa, quot poſſunt dari baſes planæ, ab enumeratis hic baſibus diuerſæ, atque illorum corporum ſuperficies laterales dummodo fuerint recta corpora.

Quartus ductus appellatur in quo baſis A B quæ ſit recta linea, vel rectangulum rectæ illi lineæ inſiſtens, vnico motu tantum rotatur, circa axem in quo ſit punctum B, quo caſu altitudo circularis, eſt arcus circuli, qui deſcribitur à puncto A. Hoc quarto ductu, ex baſi quæ ſit recta linea, producitur circulus integer. Item dimidius circulus. Item quilibet ſector circuli. Præterea ex baſi quæ ſit rectangulum, producitur cylinder; & quæuis pars cylindri, quæ ex dimidio circulo, aut ex ſectore circuli, produci poteſt ductu primo.

Quintus ductus eſt, in quo baſis A B D quæ ſit circuli quadrans, inſiſtens radio A D, vel illius quadrantis arcus A R vnico motu tantum rotatur, circa axem D B. Quo caſu altitudo circularis, eſt arcus circuli qui deſcribitur à puncto A. Hoc quinto ductu, ex baſi quæ ſit quadrans circuli, producitur dimidia ſphæra. Item partes ſphæræ contentæ tribus planis ſectoribus maximorum circulorum ſphæræ, quando duo ex his tribus ſectoribus ſunt quadrantes circuli. Præterea ex baſi quæ ſit arcus quadrantis circuli, producitur prædictorum corporum ſphærica ſuperficies, atque huiuſmodi ſuperficierum diuerſæ partes. *Fig. 2.*

Quinque ductus Geometrici, hic expoſiti, nonnihil differunt, à quinque ductibus Geometricis, propoſitis in epiſtola ad amicum aliquem ſcripta, ac deinde addita prioribus Logiſticæ libris; ſuperfluum tamen videtur annotare in quo conueniant, aut differant, quandoquidem

quidem in sequentibus non vtar nisi ductibus hoc loco propositis. In singulis ductibus Geometricis hic nominatis, non admitto nisi simplicem, siue vnicum motum basis quæ ducitur: poteram tamen sine magna difficultate duplicem motum admittere, in basi quæ ducitur: quo casu in immensum excresceret numerus superficierum & corporum producibilium ex quinque illis ductibus, & tamen hoc modo propositi, non minus vsuales forent, quam sint in sensu quo illos hic iudicauimus proponendos.

Ne æquiuocationi obnoxia sint, quæ hoc loco asseruimus, de productis ex tertio ductu Geometrico: paucis exponendum est, quandonam pyramis dicatur recta, vel conus dicatur rectus. Præterea quæ sit altitudo, in quam assurgit circumferentia baseos, quæ ductu tertio producit rectam pyramidem, vel conum rectum. Pyramis dicitur recta, quando singulæ partes circumferentiæ baseos (hoc est singulæ rectæ lineæ terminantes basim pyramidis) æqualiter distant, à vertice pyramidis. Conus dicitur rectus, quando singulæ partes circumferentiæ baseos ipsius coni, æqualiter distant à coni vertice. Altitudo, in quam assurgit circumferentia baseos, quæ ductu tertio producit pyramidem rectam, vel conum rectum: est distantia circumferentiæ baseos, à vertice ipsius rectæ pyramidis, aut coni recti. Quando ductu tertio producitur pyramis recta, aut conus rectus: singulæ partes circumferentiæ baseos assurgunt in eamdem altitudinem; hæc tamen altitudo, est diuersa, ab altitudine in quam assurgit basis, quæ producit rectam pyramidem, aut conum rectum; etenim altitudo in quam assurgit basis pyramidis, aut coni: est distantia baseos à vertice pyramidis, aut coni: verum altitudo in quam assurgit circumferentia rectæ pyramidis, aut coni recti: est distantia circumferentiæ baseos, à vertice rectæ pyramidis, aut coni recti: iam vero satis patet eiusdem pyramidis, aut coni verticem, diuersimode distare à basi, & à baseos circumferentia. Denique quando pyramis non est recta, vel conus non est rectus: tunc quidem vnica, atque eadem est distantia singularum partium baseos, à vertice pyramidis, aut coni: atque adeo tota basis in eamdem altitudinem assurgit, quando ductu tertio producit pyramidem non rectam, aut conum non rectum, sed tamen non est eadem distantia singularum partium circumferentiæ baseos, à vertice pyramidis, aut coni: atque adeo tota baseos circumferentia, non assurgit in eamdem altitudinem, quando basis ductu tertio producit pyramidem non rectam, aut conum non rectum. Ex his facile colliges, quare non dicamus pyramidis non rectæ, aut coni non recti, superficiem lateralem produci ductu tertio, ex basium circumferentia; & similiter non dixerimus corporum productorum ex ductu secundo, superficies

laterales, produci ductu ſecundo, ex baſium circumferentia, etenim nulla corpora producta ex ductu ſecundo ſunt recta, ſicut omnia corpora producta ex ductu primo recta ſunt.

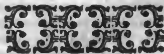
Reductuum Geometricorum apud nos rarus eſt vſus, quos proinde pluribus non proſequor. Ex ijs tamen quæ paulò ante generaliter notauimus, circa ductus atque reductus Geometricos, non difficulter intelligetur, quales reductus reſpondeant, ſingulis ductibus Geometricis hic nominatis, atque expoſitis; etenim ſuppoſito, quod X *in* Z ductu primo, producat R: tunc etiam R *per* Z reductu primo, producit X. Similiter ſuppoſito, quod X *in* Z ductu ſecundo, producat R: tunc etiam R *per* Z reductu ſecundo, producet X. Atque ita de cæteris, neque fieri poteſt vt R *per* Z reductu primo producat X, niſi etiam X *in* Z ductu primo producat R: quod hic breuiter annotaſſe ſatis arbitror, vt ex ijs, quæ de quinque nominatis ductibus Geometricis dicta ſunt, intelligantur totidem reductus Geometrici, reſpondentes ductibus Geometricis nominatis, atque expoſitis.

Ex dictis, conſtat, ductus nominatos, vel eſſe Arithmeticos, vel eſſe Geometricos; qui ductus, licet in aliquibus conueniant, tamen differunt in pluribus. Ductus Arithmeticus, & Geometricus, quodammodo conueniunt in hoc, quod ſicut in ductu Arithmetico, quantitates ductui ſeruientes, & quantitas ex ductu orta, non poſſunt eſſe niſi quantitates diſcretæ: ſic in ductu Geometrico, quantitates ductui inſeruientes, & quantitas ex ductu orta, non poſſunt eſſe niſi quantitates continuæ. Ductus Arithmeticus, & Geometricus, inter alias differentias, hanc habent diuerſitatem, quod in ductu Arithmetico quantitas quæ ducitur, & quantitas quæ ex ductu producitur, ſint quantitates eiuſdem generis, nimirum quantitates diſcretæ. In ductu Geometrico, quantitas quæ ducitur, & quantitas quæ producitur, non ſunt quantitates eiuſdem generis: etenim illud quod ducitur ductu Geometrico, acquirit nouam extenſionem, atque diuerſam ab extenſionibus quæ conueniunt baſi quæ ducitur: hinc ſi baſis quæ ducitur ductu Geometrico, ſit linea, ſiue quantitas quarti generis: quod ex ductu producitur erit ſuperficies, ſiue quantitas quinti generis, quæ habet duas extenſiones. Si verò baſis quæ ducitur ductu Geometrico, ſit ſuperficies, ſiue quantitas quinti generis, habens duas extenſiones: illud quod ex ductu producitur, erit corpus, ſiue quantitas ſexti generis, habens tres extenſiones; quare ſi illud quod ducitur ductu Geometrico, foret corpus, ſiue quantitas ſexti generis, habens tres extenſiones: illud quod ex ductu producitur, deberet habere quatuor extenſiones: Iam verò manifeſtum eſt, planè impoſſibilem, atque chimæricam eſſe quantitatem quæ habeat

beat quatuor extensiones: ergo productum ex ductu Geometrico, quo corpus in lineam duceretur, esset aliquid impossibile, atque chimæricum: ergo ductus Geometricus, in quo corpus in lineam ducitur, est impossibilis: saltem in ea Mathesi, quæ non venatur chimæras, qualis est Mathesis nostra; quod hic addo, scio enim ex modernis Mathematicis aliquos, existimare se optimè meritos de Mathesi, quod pro illa ex spatijs imaginarijs adduxerint, peramplum chimærarum famulatum, antiquioribus Mathematicis prorsus incognitum.

Dantur itaque quantitates continuæ, quæ ductu Geometrico duci non possunt; præterea etiam quantitatem continuam ducere ductu Arithmetico, est impossibile. Sed non datur vllus ductus diuersus à ductu Arithmetico & Geometrico: ergo dantur quantitates quæ nullo ductu duci possunt, & tales quantitates sunt, exempli gratia, corpora siue quantitates sexti generis: præter quas plures aliæ inueniuntur, quæ nullo ductu duci possunt, sed reliquis hic non indigemus: eas tamen facile cognosces, si reflectas ad illa quæ hic diximus de ductibus. Posita hic stabilita veritate, nimirum impossibile esse, corpus A, ducere vllo ductu: atque adeo impossibile esse, corpus A, ducere in corpus B: considera, exempli gratia, Theorema 4. cap. 8. libri 1. Logisticæ. Vbi inuenies hanc assertionem *qualescunque fuerint quantitates A, B, C, D. Dico primo. Si A ad B = C ad D: etiam A in D = B in C.* Ex hoc Theoremate deduci posset subsequens discursus, in quo infertur propositio repugnans veritati paulò antè stabilitæ. Qualescunque fuerint quantitates A, B, C, D; si A *ad* B = C *ad* D: etiam A *in* D = B *in* C: ergo supposito, quod singulæ quantitates A, B, C, D sint corpora: & quod A ad B = C ad D. Etiam A *in* D = B *in* C: ergo in posita hypothesi, scriptiones A *in* D, & B *in* C, significant aliquas quantitates: sed etiam singulæ illæ scriptiones significant aliquod productum ex ductu aliquo: ergo in posita hypothesi, scriptiones singulæ, A *in* D, item B *in* C, significant aliquas quantitates quæ sint producta ex aliquo ductu: atque etiam in posita hypothesi scriptiones, A *in* D, & B *in* C, singulæ significant producta ex ductu corporum: ergo producta ex aliquo ductu, sunt producta ex ductu corporum; ergo corpora duci possunt aliquo ductu; quæ propositio planè aduersatur paulò antè propositæ propositioni, in qua asseruimus, corpus nullo ductu duci posse. Nisi fallor huiusmodi aliquis discursus, supra memoratos Matheseos benefactores coëgit, pro Mathesi chimæras aduocare: quibus admissis, ad argumentum responderi posset, nullum quidem dari ductum realem, quo corpus ducatur; dari tamen ductum imaginarium, siue chimæricum, quo corpus ducatur: & in proposita hypothesi A *in* D signifi-

care, non quidem veram, ſed chimæricam quantitatem, ex chimærico ductu productam. Cum in familiari colloquio, in defenſionem alicuius authoris, allatæ reſponſioni ſimilis aliqua fuiſſet adducta, tanquam legitima: adſtantium aliquis, intulit, magnum profectò ingenij monſtrum fateri neceſſe eſt, ex quo originem ducit talis chimærarum proſapia, ſpecioſis nominibus ſpectabilis, ac decora. Vt intelligas, quid ego reſpondeam ad propoſitam difficultatem, aduerte, nos paulò antè monuiſſe ſcriptionem A *in* D ſignificare productum ex ductu Arithmetico, idque verum eſſe qualeſcunque fuerint quantitates A & D, quare etiam facta hypotheſi, quod litteræ A & D, ſingulæ corpora ſignificent: tamen ſcriptio A *in* D, non ſignificat niſi productum ex ductu Arithmetico. Etenim ab hac ſcriptione diuerſa eſt, quæ indicat producta ex ductu Geometrico: ex qua diuerſitate fit, quod in noſtra Logiſtica, per ipſas ſcriptiones clarè indicetur, an productum ſcriptione indicatum, Arithmeticum ſit, an verò ſit Geometricum. Si his addas, quæ de quantitatibus æquiualentibus paulò antè dicta ſunt, intelliges, dari quantitatem diſcretam æquiualentem corpori A: item dari quantitatem diſcretam æquiualentem corpori D: quare facta hypotheſi quod litteræ A & D, ſingulæ ſignificent corpora: ſcriptio A *in* D, ſignificat productum ex ductu Arithmetico, quod habetur, quando quantitas diſcreta, æquiualens corpori A, ducitur in quantitatem æquiualentem corpori D; hinc manifeſtum fit vitium quo laborat prius propoſitum argumentum: ad quod, vt in forma reſpondeam, conceſſis prioribus, nego hanc ſubſumptam, *atqui etiam in poſita hypotheſi ſcriptiones, A in D, & B in C, ſingula ſignificant producta ex ductu corporum*. Hæc propoſitio falſa eſt: etenim tametſi per hypotheſim ſingulæ litteræ A, B, C, D, ſignificent corpora, & ſcriptiones, A *in* D, item B *in* C, ſingulæ ſignificent producta: tamen ſcriptiones illæ non ſignificant producta ex corporibus: ſed ſingulæ illæ ſcriptiones ſignificant producta ex quantitatibus diſcretis, quæ æquiualent corporibus eiſdem litteris repræſentatis in hypotheſi: adeo vt in propoſito caſu, ſcriptio A *in* D, idem ſignificet, ac productum, quod habetur ex ductu Arithmetico, in quo quantitas diſcreta æquiualens corpori A, ducitur in quantitatem diſcretam æquiualentem corpori D.



CAPVT

CAPVT IV.

Ductuum, & quantitatum ex vnico ductu nominato genitarum, diuisio, in diuersas classes.

Eiusdem classis ductus appello, illos, per quos ex quantitatibus æqualibus, vel æquiualentibus, producuntur quantitates æquales, vel æquiualentes. Diuersæ classis ductus dicuntur, illi, per quos ex quantitatibus æqualibus, vel æquiualentibus, non producuntur quantitates æquales, vel æquiualentes. Hinc ductus nominati, distinguuntur in quatuor diuersas ductuum classes. Ad primam ductuum classem pertinet ductus Arithmeticus, & præterea Geometricus ductus primus, & secundus. Ad secundam ductuum classem spectat tertius ductus Geometricus, in quo vnica basis extensio decrescit; item quartus ductus Geometricus. Tertiam ductuum classem constituit tertius ductus Geometricus, in quo duplex basis extensio decrescit. Denique, quarta ductuum classis, ex ductibus nominatis, non continet nisi quintum ductum Geometricum. Conformiter ad hanc ductuum nominatorum diuisionem in quatuor diuersas classes, etiam quantitates ex vnico ductu nominato genitas, distinguo in quatuor classes diuersas: vbi per vocem genitum breuiter significo quantitatem productam, siue genitam ex ductu: & per genitum simplex, intelligo quantitatem productam ex vnico ductu. Genitum simplex primæ classis appellatur, quantitas quæ realiter, vel æquiualenter producta intelligitur ex vnico ductu primæ classis. Similiter genitum simplex secundæ classis vocatur, quantitas quæ realiter, vel æquiualenter producta intelligitur, ex vnico ductu secundæ classis. Genitum simplex tertiæ classis dicitur, quantitas quæ realiter vel æquiualenter producta intelligitur, ex vnico ductu tertiæ classis. Denique genitum simplex quartæ classis, est quantitas, quæ realiter vel æquiualenter producta intelligitur, ex vnico ductu quartæ classis. Superest hic, vt declarem. Primo, quandonam quantitas intelligatur producta ex vnico ductu. Secundo, quando quantitas intelligatur realiter producta ex vnico ductu. Tertio, quando quantitas intelligatur æquiualenter producta ex vnico ductu. Quantitas intelligitur producta ex vnico ductu, quando indicatur scriptione tantum vnicum ductum significante. Ex: Gr: qualescunque quantitates significent litteræ A & B, quantitas significata hac scriptione, A in B, erit quantitas quæ intelligitur producta ex vnico ductu: & quantitas significata

cata hac scriptione, A *in* B *in* A, non erit quantitas quæ intelligatur producta ex vnico ductu; etenim postrema scriptio significat productum ex duplici ductu: prior vero significat productum ex vnico ductu. Quantitas intelligitur realiter producta ex vnico ductu, si litteræ adhibitæ in scriptione vnum ductum significante, in illa scriptione significent easdem quantitates, quas significant in hypothesi. Quantitas intelligitur æquiualenter producta ex vnico ductu, quando litteræ adhibitæ in scriptione vnicum ductum significante, in illa scriptione significant quantitates, tantum æquiualentes quantitatibus quas in hypothesi significant. Exempli gratia facta hypothesi, quod litteræ A & B, singulæ significent quantitates discretas: scriptio A *in* B, significabit quantitatem, quæ intelligitur realiter producta ex vnico ductu: quia tam in hypothesi, quam in scriptione A *in* B, singulæ litteræ A & B, significant quantitatem discretam. Verum posita hypothesi, quod singulæ litteræ A & B, non significent quantitatem discretam, sed repræsentent alterius generis quantitatem: scriptio A *in* B, significabit quantitatem, quę intelligitur ęquiualenter producta ex vnico ductu. Etenim in scriptione A *in* B, litteræ A & B, singulæ significant quantitatem discretam, æquiualentem quantitati alterius generis, quam in hypothesi significant, vt satis patet, ex ijs quæ paulo ante diximus de quantitatibus æquiualentibus, & etiam de ductibus, vbi asseruimus, scriptionem A *in* B, non repræsentare nisi ductum Arithmeticum, quo non nisi quantitates discretæ duci possunt.

CAPVT V.

Proponuntur aliqua de angulis, & angulorum radijs, sinibus, atque subtensis.

Vox angulus, non significat aliquam quantitatem, sed significat aliquam formam abstractam, spectantem ad quartum genus formarum abstractarum (de quibus egimus in reflexione secunda cap. 4. partis primæ) significat enim aliquam dispositionem abstractam, à qua vna quantitas, potest dici hoc vel illo modo disposita, cum altera quantitate. Præterea vox angulus, non significat qualemcunque dispositionem vnius quantitatis cum altera quantitate, sed illam dispositionem, quæ magis proprié appellatur apertura, à qua liber dicitur apertus, vel magis aut minus apertus. Item porta, aut fenestra dicitur aperta, vel magis aut minus aperta. Non vacat hic inquirere, an pro Mathesi superflua sit omnis consideratio, aperturæ, quæ inuenitur inter

alias

alias quantitates quam rectas lineas, aut superficies planas, alias tamen aperturas non consideramus: immo vt ea quæ nobis vtilia sunt statuamus de apertura, quæ inuenitur inter duas planas superficies, aut inter rectam lineam & superficiem planam: vix aliud requiritur, quam consideratio aperturæ, quæ inter duas rectas lineas inuenitur: quæ apertura consueuit appellari angulus rectilineus, vel angulus: etenim de rectilineo angulo sermo est, quando oppositum expresse non significatur. Angulus rectilineus, est apertura quam habent duæ rectæ lineæ in eodem puncto concurrentes. Exempli gratia, posito quod duæ rectæ lineæ A B, & C B, concurrant in puncto B: tunc apertura quam habent illæ duæ lineæ A B, & C B, dicitur angulus rectilineus A B C: hoc est angulus constitutus à rectis lineis A B & C B: vel apertura constituta à rectis lineis A B & C B: vel apertura quam habent rectæ lineæ A B, & C B; & quia angulus, & apertura, idem significant: angulus A B C dicitur maior, vel minor, quo apertura quam habent lineæ A B, & C B, est maior, vel minor. *Fig. 3.*

Nota quando de angulo nobis sermo est, & dubium esse posset, an de angulo rectilineo, vel alio angulo agamus: intelligi volumus de angulo rectilineo: quoties enim de angulo non rectilineo aliquid asserimus, expresse addimus quæ sufficiunt ad tollendum omne periculum æquiuocationis, exempli gratia, nominando angulum B A D intelligi possemus, tum de angulo, siue apertura quæ inuenitur inter rectam lineam B A, & curuam lineam D A: tum etiam de apertura quæ inuenitur inter rectam lineam B A, & rectam lineam D A; quia ex puncto D, ad punctum A, duæ lineæ excurrunt, quarum vna recta est, altera est curua; quod æquiuocationis periculum sufficienter tollitur, per notam hic propositam: in qua non introducimus nouum loquendi modum, sed tantum exponimus quomodo velimus intelligi, vt sine periculo æquiuocationis, possimus adhibere, loquendi modum, apud præstantiores Mathematicos, passim vsu receptum.

Vertex anguli, est punctum, in quo concurrunt duæ lineæ, angulum constituentes. Exempli gratia, anguli A B C vertex, est punctum B. Mensura anguli, est arcus circuli, centrum habentis in vertice anguli, qui arcus continetur, atque terminatur lineis angulum constituentibus. Exempli gratia, anguli A B C mensura est arcus A D, supposito quod centrum habeat in B. Dici etiam posset, quod mensura anguli, sit distantia circularis, duarum linearum quæ angulum constituunt. Radius anguli, est distantia verticis, à mensura anguli, siue radius quo mensura anguli descriptus est. Exempli gratia, recta linea B A, est radius anguli A B C, supposito quod arcus A D, sit mensura anguli A B C. Sinus anguli, est distantia extremitatis mensuræ anguli, ab oppo-

opposito anguli latere. Exempli gratia, distantia puncti A, à recta linea C B, est sinus anguli A B C: eritque recta A E, sinus anguli A B C, supposito quod A E sit perpendicularis ad rectam C B. Subtensa anguli, est distantia extremitatum mensuræ anguli ab inuicem; siue recta linea connectens extremitates mensuræ anguli. Exempli gratia, recta A D, est subtensa anguli A B C. Angulus rectus dicitur, qui pro mensura habet arcum, qui sit quarta pars circuli, vel potius circumferentiæ circuli. Angulus acutus dicitur, qui pro mensura habet arcum, minorem quarta parte circuli. Angulus obtusus dicitur, qui pro mensura habet arcum maiorem quarta parte circuli. Ex duobus angulis, vnus alteri æqualis esse dicitur, quando æqualibus radijs descriptas mensuras, æquales habent. Ille angulus, altero maior dicitur, cui ex mensuris æqualibus radijs descriptis, maior mensura conuenit, similiter ille angulus, altero minor dicitur, cui,ex mensuris æqualibus radijs descriptis, minor mensura conuenit. Complementum anguli A B C, saltem à nobis, appellatur anguli A B C, defectus à recto angulo, vel excessus supra rectum angulum: quare supposito,quod angulus A B C, † B A E = recto angulo: tunc angulus A B C, erit complementum anguli B A E; & etiam angulus B A E, erit complementum anguli A B C. Rursus supposito quod angulus A B C — B A E = recto angulo: tunc angulus A B C erit complementum anguli B A E: & etiam angulus B A E, erit complementum anguli A B C. Hinc facile intelliges, quid sit sinus complementi anguli A B C; etenim ita breuius significatur, sinus illius anguli, qui est complementum anguli A B C: & supposito quod anguli A B C, complementum sit angulus B A E: etiam sinus anguli B A E, erit sinus complementi anguli A B C. Anguli planum, est plana superficies in qua est vtraque linea angulum constituens. Exempli gratia, plana superficies transiens per puncta A, B, C, erit planum anguli A B C. Angulus dicitur insistere cuiuis lineæ ductæ in plano anguli, atque terminatæ, è duobus anguli lateribus. Exempli gratia, angulus A B C, dicitur insistere rectæ A E: item rectæ A D; item arcui A D; & cuiuis lineæ, in plano anguli, ductæ ab aliquo puncto rectæ A B,ad aliquod punctum rectæ C B, diuersum à puncto B. Anguli axis, dicitur, linea quæ est axis mensuræ anguli: siue recta linea, per anguli verticem ducta, atque perpendicularis, ad vtrumque latus anguli,siue ad planum anguli. Angulus planus, dicitur apertura quam habet planum, concurrens cum altero plano, vel recta linea. Axis anguli plani qui fit à duobus planis concurrentibus, est recta linea, in qua duo illa plana concurrunt. Axis anguli plani qui fit à plano A concurrente cum recta linea B, est recta linea, perpendicularis ad lineam

B, atque

B, atque excurrens per planum A. Angulus rectilineus plano angulo æquiualens, dicitur ille angulus rectilineus, cuius latera, coincidunt lateribus anguli plani, & insuper axis, coincidit axi anguli plani. Nota, angulum planum, habere eamdem mensuram, eumdem radium, eumdem sinum, eamdem subtensam, atque idem complementum, cum angulo rectilineo cui æquiualet.

CAPVT VI.

Proponuntur aliqua quæ seruiunt ad intelligentiam Mathematicarum proportionum, atque proportionalitatum.

VT compendiosè, sed tamen intelligibiliter indicare possim sensum meum in ijs, quæ hoc loco sunt exponenda, circa rationes siue proportiones: aduertendum nihil dici posse maius, minus, vel æquale, nisi facta comparatione, ad aliquid, respectu cuius dicatur maius, minus, vel æquale; hinc quidquid significent, aut repræsentent litteræ A & B, quoties A dicitur maius, minus, vel æquale B, tria considerari, atque intelligi possunt, inter se distincta: nimirum A, quod dicitur maius, minus, vel æquale, & vocatur antecedens terminus comparationis, siue relationis. Deinde, B, respectu cuius A dicitur maius, minus, vel æquale, & appellatur consequens terminus comparationis, aut relationis. Denique, respectus, qui inter A & B intelligitur, sine quo respectu, impossibile est intelligere A esse maius, minus, vel æquale B: atque hic respectus, distinctus, tum ab antecedente, tum à consequente termino relationis, à me appellatur relatio abstracta. Per relationem concretam, intelligo, antecedentem terminum, habentem abstractam relationem: hoc est illud, quod in antecedente termino inuenitur, & mediante abstracta relatione intelligitur referri ad consequentem terminum. Exempli gratia quando superficies A dicitur magis, minus, vel æqualiter longa, ac superficies B, relatio abstracta erit respectus longitudinis, qui intelligitur inter antecedentem terminum A, & consequentem terminum B. Relatio concreta, erit superficies A præcisè considerata vt longa est, atque relata ad superficiem B. Similiter quando superficies A dicitur magis, minus, vel æqualiter lata, ac superficies B: in hac relatione A ad B, relatio abstracta, erit respectus latitudinis, qui intelligitur inter superficiem A & superficiem B. Relatio concreta, erit

superficies A, præcisè considerata, vt lata est, atque relata ad superficiem B. Pari modo quando superficies A dicitur magis, minus, vel æqualiter magna, ac superficies B. In hac relatione superficiei A ad superficiem B: relatio abstracta, erit respectus magnitudinis, qui intelligitur inter superficiē A & superficiem B. Relatio concreta, erit superficies A præcisè cōsiderata vt magna est, atq; relata ad superficiem B.

Ratio, siue proportio, est quantitas habens abstractam relationem magnitudinis, ad aliam quantitatem eiusdem generis. Siue est relatio concreta, respondens abstractæ relationi magnitudinis, quæ consistit inter duas quantitates eiusdem generis. Non erit inutile aduertere, tàm de linea curua, quàm de linea non curua, verificari, quod sit concretum longitudinis: & licet curua linea sit cōcretum longitudinis habens curuitatem, atq; linea non curua sit concretum longitudinis non habens curuitatem: tamen quia concretum longitudinis, semper perseuerat concretum longitudinis, siue habeat curuitatem: siue non habeat curuitatem: tam de linea curua, quàm de linea non curua, verificatur, quod sit linea, siue cōcretum longitudinis. Similiter tàm de linea relata ad alteram lineam, quàm de linea non relata ad alteram lineam, verificatur, quod sit linea. Atque etiam, tàm de quantitate relata ad aliam quantitatem, quàm de quantitate non relata ad aliam quantitatem, verum est dicere, quod sit quantitas; ac denique tàm de quantitate habente abstractam relationem magnitudinis, quàm de quantitate non habente abstractam relationem magnitudinis, verum est dicere, quod sit quantitas. Quæ singula tàm manifesta sunt, quàm clarè patet, non minus hominem esse eum qui diuitias habet, quam eum qui non habet diuitias. Præterea quemadmodum tàm de quarti generis quantitate A, quæ curuitatem habet, quàm de quarti generis quantitate B, quæ curuitatem non habet, verificatur quod sit quantitas quarti generis: ita etiam tàm de quarti generis quantitate C, habente abstractam ralationem magnitudinis, quàm de quarti generis quantitate D, non habente abstractam relationem magnitudinis, verificatur quod sit quantitas quarti generis. Ex his patet, quod ratio, siue proportio A *ad* B, sit quantitas; immò quod sit quantitas spectans ad idem genus quantitatis ad quod spectant quantitates A & B. Quare supposito, quod quantitates A, & B, sint quantitates primi generis: iuxta nos, etiam ratio A *ad* B, erit quantitas primi generis. Similiter supposito quod quantitates A, & B, sint quantitates secundi generis: etiam ratio A, *ad* B, erit quantitas secundi generis: atque ita de cęteris. Quandoquidē vero ratio A *ad* B, sit quantitas spectans ad idem genus quantitatis, ad quod spectant termini, siue quantitates A, & B: neque dari possit aliqua ratio A *ad* B, cuius termini A, & B nō spectent ad aliquod

cx

ex sex quantitatis generibus supra enumeratis: etiam nulla ratio A *ad* B dari potest, quæ non sit quantitas pertinens ad aliquod ex prædictis sex generibus quantitatis: aut constituat quãtitatem diuersi generis, ab ijs quantitatum generibus, quæ paulò antè à nobis fuerunt enumerata.

Quandoquidem quælibet proportio quantitas sit, & quælibet duæ quantitates, aut realiter, aut æquiualenter, possint addi, subtrahi, multiplicari, diuidi: etiam quælibet ratio A *ad* B, realiter, vel æquiualenter poterit addi rationi C *ad* D: vel ex illa auferri: vel in illam duci: vel per illam diuidi. Præterea quemadmodum ea, quæ docuimus capite secundo libri primi Logisticæ, sufficiunt, vt scriptione Logistica exhibeatur productum ex duarum quarumlibet quantitatum additione, subtractione, multiplicatione, aut diuisione: sic etiam sufficiunt, vt scriptione Logistica exhibeatur, productum, ex duarum quarumlibet rationum additione, subtractione, multiplicatione, atque diuisione; iuxta quam doctrinam; scriptio A *ad* B † C *ad* D, significat productum ex additione rationum A *ad* B, & C *ad* D. Scriptio A *ad* B − C *ad* D significat productum ex additione rationum, quæ in scriptione repræsentantur: quod productum non differt à producto quod habetur, quando ex ratione A *ad* B, subtrahitur ratio C *ad* D. Nulla enim datur scriptio Logistica, quæ indicet subtractionem, aut productum ex subtractione instituta circa quantitates, quæ scriptione repræsentantur, de quo plura capite 9. huius secundæ partis. Scriptio A *ad* B *in* C *ad* D, significat productum quod habetur, ex ratione A *ad* B, ducta in rationem C *ad* D. Scriptio A *ad* B *per* C *ad* D, significat productum quod habetur, quando ratio A *ad* B, diuiditur per rationem C *ad* D.

Quandoquidem omnis ratio, siue proportio sit quantitas: & iuxta doctrinam cap. 4. lib. 1. Logisticæ, quantitas ex vna æquationis parte, sub contrario signo translata ad partem oppositam non vitiet æquationem: peti posset an proportio, ex vna æquationis parte, sub contrario signo translata ad partem oppositam, vitiet æquationem? ad quod respondeo per talem proportionis translationem, nullo modo vitiari æquationem consistentem inter proportiones, atque adeo supposito, quod A *ad* B † C *ad* D = E *ad* F: legitimè sequi, quod etiam A *ad* B = E *ad* F − C *ad* D. Circa voces, idem, æquale, simile, aduertendum, quod illæ voces eamdem planè significationem habeant, quando agitur de rationibus. Exempli gratia idem planè significatur, quando dicitur, rationem A *ad* B, esse eamdem cum ratione C *ad* D: & quando dicitur, rationem A *ad* B, esse æqualem, vel similem, rationi C *ad* D. Neque dantur duæ rationes similes, quæ non sint æquales. Vbi tamen agitur de quantitatibus, quæ non sint ra-

 tiones,

tiones, prædictæ voces, non habent eamdem significationem. Ita Ex. Gr. quadratum potest esse æquale triangulo, sed non potest esse simile triangulo. Et etiam omnia quadrata sunt interse similia, licet non sint interse æqualia. Quid requiratur, vt duæ rationes dicantur eædem, siue æquales, hic non expono: etenim paulò pluribus nobis agendum est de rationum æqualitate, atque difficultatibus, quas hæc æqualitas annexas habet. De quibus ago initio partis 4. huius Ideæ.

Proportionalitas, siue ratio proportionum, aut rationum, est relatio concreta, respondens abstractæ relationi magnitudinis, quæ consistit inter duas rationes. Siue est ratio, habens abstractam relationem magnitudinis, ad aliam rationem. Proportionalitatem exhibent singulæ sequentes scriptiones. A *ad* B respectu C *ad* D. Item ratio A ad rationem B. Item proportionalitas A *ad* B. In prima scriptione, tàm antecedens, quàm consequens terminus proportionalitatis, duplici littera exhibetur, quæ litteræ connexæ particula, ad, rationem significant. In secunda, & tertia scriptione, antecedens terminus proportionalitatis, vnica littera A repræsentatur: & similiter consequens terminus proportionalitatis, vnica littera B repræsentatur: atque adeo singulæ illæ litteræ A & B, singulas rationes repræsentant. Pauca hæc sufficere existimo, tum vt intelligatur, quid sint proportionalitates, tum etiam vt sciatur quomodo eas repræsentemus scriptione Logistica. Tàm ratio, quàm proportionalitas, adæquatè diuiditur in rationem: aut proportionalitatem æqualitatis, & maioris, ac minoris inæqualitatis, vel enim antecedens terminus rationis, aut proportionalitatis, æquatur consequenti termino: & tunc dicitur ratio,aut proportionalitas, æqualitatis; vel antecedens terminus est maior consequente termino: & erit ratio, vel proportionalitas, maioris inæqualitatis; vel denique antecedens terminus, est minor consequente termino: quo casu ratio, vel proportionalitas, erit minoris inæqualitatis. Ex. Gr. Ratio A *ad* B, dicitur ratio æqualitatis: quando A = B;& viciſſim quoties A = B, ratio A *ad* B erit ratio æqualitatis. Ratio A *ad* B,erit ratio maioris inæqualitatis:si A est maior B;& viciſſim,quoties A est maior B,ratio A *ad* B, dicitur ratio maioris inæqualitatis. Ratio A *ad* B,erit ratio minoris inæqualitatis: si A est minor B; & viciſſim, quoties A est minor B, ratio A *ad* B, dicitur ratio minoris inæqualitatis. A *ad* B respectu C *ad* D, erit proportionalitas æqualitatis: si ratio A *ad* B = C *ad* D; & viciſſim, quoties ratio A *ad* B = C *ad* D, tunc A *ad* B respectu C *ad* D erit proportionalitas æqualitatis.A *ad* B respectu C *ad* D, erit proportionalitas maioris inæqualitatis, si ratio A *ad* B, est maior ratione C *ad* D; & viciſſim, quoties ratio A *ad* B, est maior ratione

C *ad* D, tunc etiam A *ad* B respectu C *ad* D, erit proportionalitas maioris inæqualitatis. Denique A *ad* B respectu C *ad* D, erit proportionalitas minoris inæqualitatis, si ratio A *ad* B, est minor ratione C *ad* D; & vicissim, quoties ratio A *ad* B, est minor ratione C *ad* D: etiam A *ad* B respectu C *ad* D, erit proportionalitas minoris inæqualitatis.

Ratio, siue proportio, etiam diuiditur in rationem quæ vocatur simplex, & in rationem quæ appellatur composita. Quid sit compositio, à qua ratio dicitur composita, communi Mathematicorum consensu certum non est: alij enim volunt hanc compositionem non differre ab additione; alij statuunt hanc compositionem non differre à multiplicatione; qua de re paulò plura inuenies in quarta parte. Conformiter ad nostra, atque præcipuorum Mathematicorum principia, rationum compositio, non differt à rationum multiplicatione: atque adeo ratio composita, non differt à ratione producta per multiplicationem, quo supposito. Ratio simplex dicitur, quæ vnica est, & non intelligitur producta per multiplicationem. Ratio composita appellatur, ratio quæ vnica quidem est: sed intelligitur producta ex multiplicatione; quare omnis, & sola scriptio Logistica, in qua duæ, aut plures rationes repræsentantur, realiter, vel æquiualenter connexæ particula in, repræsentat rationem compositam, ex rationibus particula in connexis. Exempli gratia prima scriptio sit ratio A *ad* B. Secunda sit ratio A *ad* B *in* C *ad* D. Tertia sit ratio A *ad* B *in* A *ad* B. Quarta sit A *ad* B *in* A *ad* B *in* A *ad* B. Quinta sit A 2 *ad* B 2. Sexta sit A 3 *ad* B 3. Quomodo singulæ illæ scriptiones Logisticæ legantur, satis patet ex ijs, quæ dicta sunt de scriptionibus Logisticis, ex his scriptionibus, prima significat rationem simplicem: reliquæ omnes significant rationem compositam: tamen cum aliqua differentia: etenim secunda, tertia, & quarta scriptio, repræsentant rationes, realiter connexas particula in, quinta, & sexta scriptio repræsentant rationes, æquiualenter connexas particula in, etenim quinta scriptio A 2 ad B 2, compendiosius idem repræsentat, quod repræsentatur à tertia scriptione A *ad* B *in* A *ad* B. Similiter, sexta scriptio A 3 *ad* B 3, compendiosius idem repræsentat, quod repræsentatur à quarta scriptione A *ad* B *in* A *ad* B *in* A *ad* B. Ratio composita ex duabus rationibus æqualibus, appellatur ratio duplicata, vnius ex illis rationibus. Similiter, ratio composita ex tribus, vel quatuor, rationibus æqualibus, dicitur triplicata, aut quadruplicata, vnius ex illis rationibus. Exempli gratia, scriptio A 2 *ad* B 2, legitur quidem, A secundum ad B secundum: sed significat rationem duplicatam, rationis A *ad* B. Similiter scriptio, A 3 *ad* B 3, legitur quidem A tertium *ad* B tertium: sed significat eamdem rationem,

nem, quæ appellatùr triplicata rationis A *ad* B. Ex eo quod ratio sit quantitas, paulò antè intulimus, rationes posse addi, subtrahi, multiplicari, diuidi: quibus addendum, rationes, etiam admittere illam diuisionem, quæ aliter vocatur radicis extractio; & quemadmodum quantitatis X, prima radix, dicitur quantitas Z, quæ semel in se ducta producit quantitatem X: ita radix prima rationis C *ad* D; erit ratio quæ semel in se ducta, producit rationem C *ad* D. Similiter, radix secunda rationis C *ad* D, erit ratio quæ bis in se ducta, producit rationem C *ad* D. Atque ita de cæteris. Exempli gratia, R 1 ⁎ C *ad* D legitur quidem radix prima C *ad* D, significat tamen idem, ac si diceretur, ratio quæ semel in se ducta producit rationem C *ad* D: quæ ratio aliter etiam dicitur, ratio subduplicata rationis C *ad* D. Pari modo R 2 ⁎ C *ad* D, legitur radix secunda C *ad* D, sed significat idem, ac si diceretur, ratio quæ bis in se ducta producit rationem C *ad* D; quæ ratio aliter etiam appellatur, subtriplicata rationis C *ad* D. Hinc supposito quod A 2 *ad* B 2 = C *ad* D, tunc etiam R 1 ⁎ C *ad* D = A *ad* B. Eritque ratio A *ad* B, subduplicata rationis C *ad* D. Ipsa vero ratio C *ad* D erit duplicata rationis A *ad* B. Rursus supposito quod C 3 *ad* D 3 = A *ad* B, tunc R 2 ⁎ C *ad* D = A *ad* B, eritque ratio A *ad* B subtriplicata rationis C *ad* D: atque ratio C *ad* D, erit triplicata rationis A *ad* B.

CAPVT VII.

Quantitas distinguitur in quantitatem propriè dictam, & quantitatem impropriè dictam.

NOn solum apud me, sed etiam apud alios omnes verum est, nullam dari proportionem, aut rationem, nisi inter quantitates eiusdem generis. Quare supposito quod angulus non sit quantitas: inter angulos, non datur proportio. Similiter inter curuitates, inter sonos, inter pondera, inter motus, &c. non datur proportio; & tamen, tum apud me, tum apud alios Mathematicos, passim inueniuntur loquutiones, in quibus asseritur proportio, inter angulos, & alia eiusmodi entia, quæ non sunt quantitates. Pro quo aduertendum dari aliqua entia, quæ non sint quantitates, sed mensurantur à quantitatibus; alia vero entia, neque sunt quantitates, neque mensurantur à quantitatibus. Exempli gratia, angulus rectilineus, siue apertura duarum rectarum linearum, non est quantitas, sed mensuratur à quantitate, siue ab arcu,

arcu, qui est linea. Similiter distantia, non est quantitas, sed mensuratur à quantitate, nimirum à linea, Sic etiam soni, pondera, motus, &c. Quantitates non sunt, sed mensurantur à quantitatibus. Quare propriè loquendo, dici potest, quod mensura vnius anguli A, ad mensuram alterius anguli B, habeat proportionem. Item quod mensura vnius distantiæ A, ad mensuram alterius distantiæ B, habeat proportionem. Item quod mensura vnius motus A, ad mensuram alterius motus B, habeat proportionem, &c. Quemadmodum vero prædictæ assertiones, propriè loquendo veræ sunt: sic impropriè loquendo, veræ sunt sequentes assertiones, in quibus de rebus mensuratis affirmatur, quod propriè mensuris conuenit. Exempli gratia, quando dicitur quod angulus A, ad angulum B habeat proportionem. Vel quod distantia A, ad distantiam B habeat proportionem. Vel quod motus A, ad motum B habeat proportionem, &c. Huiusmodi loquutiones passim apud mathematicos vsitatas esse, certum est; & quoniam in illis res mensurata sumitur pro ipsa mensura, nimium recederemus à communi, atque optimè introducto loquendi vsu, si nollemus admittere loquutiones improprias, in quibus res mensurata sumitur pro mensura. Conformiter ad hunc loquendi vsum, distinguo quantitatem, in quantitatem propriè dictam, & quantitatem impropriè dictam. Quantitas propriè dicta, est ens cui conuenit definitio quantitatis. Quantitas impropriè dicta, est ens, de quo impropriè loquendo, asseritur illud, quod conuenit quantitati, quæ est mensura talis entis. Sic exempli gratia, quando dicitur, quod angulus A, ad angulum B habeat proportionem: anguli A & B, sunt quantitates impropriè dictæ. Item quando dicitur quod distantia A, ad distantiam B, habeat proportionem; distantiæ A & B, sunt quantitates impropriè dictæ. Item quando dicitur, quod motus A, ad motum B, habeat proportionem: motus A & B, sunt quantitates impropriè dictæ. Hinc satis manifestum est, omne illud quod propriè affirmari potest de quantitatibus, quæ sunt mensuræ entium A & B, etiam impropriè affirmari posse, de entibus A & B. Præterea idem requiri, atque sufficere, vt aliquid propriè verificetur de quantitatibus propriè dictis, quæ sunt mensuræ entium A & B: vel vt impropriè loquendo, verificetur de entibus A & B, quæ sunt quantitates impropriè dictæ. Et quoties quantitates propriè dictæ, quæ sunt mensuræ entium A & B, possunt addi, subtrahi, multiplicari, diuidi, sic vt perseuerent mensuræ eiusmodi entium: tunc etiam illa entia, impropriè loquendo, dicuntur posse addi, subtrahi, multiplicari, diuidi; atque admisso hoc loquendi modo, quod asseritur de quibuscunque quantitatibus, non minus verum est, atque intelligi potest de quantitatibus

propriè

propriè dictis, quam de quantitabus impropriè dictis. Hinc ſuppoſito, exempli gratia quod A = B, & inſuper C = D: non minus euidens, atque ex terminis notum erit, angulum A † C = angulo B † D: quam ſit euidens, ac per ſe notum lineam A † C = lineæ B † D: aut numerum A † C = numero B † D; licet in prima æquatione ſingulæ litteræ A, B, C, D, ſignificent angulos, qui ſunt quantitates impropriè dictæ; & in ſecunda aſſertione, ſingulæ litteræ A, B, C, D, ſignificent lineas, quæ ſunt quantitates propriè dictæ; ac denique in tertia aſſertione, ſingulæ litteræ A, B, C, D, ſignificent numeros, qui ſunt quantitates propriè dictæ.

CAPVT VIII.

Exponitur quid ſint operationes Logiſticæ.

QVantitatem A, addere quantitati B, eſt inuenire vnam quantitatem C, quæ ſit æqualis quantitatibus A & B, ſimul ſumptis. Quantitatem A ſubtrahere ex quantitate C, eſt inuenire quantitatem B, ita vt quantitas C, æquetur quantitatibus A & B, ſimul ſumptis. Quantitas C, quæ producitur ex additione quantitatum A & B, aliter vocatur aggregatum quantitatum A & B. Similiter quantitas B, quæ eſt productum, ex ſubtractione quantitatis A, ex quantitate C, aliter dicitur defectus quantitatis A, à quantitate C: vel etiam differentia quantitatum A & C. Quantitati A, addere quantitatem B, eſt inuenire vnam quantitatem C, quæ ſit aggregatum quantitatum A & B. Similiter ex quantitate C ſubtrahere quantitatem A, eſt inuenire quantitatem B, quæ ſit defectus quantitatis A à quantitate C. Hinc additio quantitatis A, & quantitatis B, eſt inuentio vnius quantatis C, quæ ſit aggregatum quantitatum A & B. Exempli gratia additio numeri 4, & numeri 3, eſt inuentio numeri 7, qui eſt aggregatum numerorum 4 & 3. Subtractio quantitatis A, ex quantitate C, eſt inuentio quantitatis B, quæ ſit defectus quantitatis A, à quantitate C. Exempli gratia, ſubtractio numeri 4, ex numero 7, eſt inuentio numeri 3, qui eſt defectus numeri 4, à numero 7.

Nota primo. Si quantitates A & B, ſingulæ ſint poſitiuæ illorum aggregatum C, erit poſitiuum. Si quantitates A & B, ſingulæ ſint negatiuæ, illorum aggregatum C erit quantitas negatiua. Si ex duabus quantitatibus A & B, vna ſit poſitiua, altera negatiua, illarum aggregatum C, erit poſitiua quantitas, ſi quantitatum A & B maior ſit quantitas poſitiua; vel aggregatum C erit quantitas negatiua, ſi quanti-

quantitatum A & B maior, fit negatiua: vt satis patet ex ijs quæ hic dicta sunt de additione, & in appendice libri secundi Logisticæ notantur, circa significationem signorum † & —.

Ex hac nota fere immediatè habetur fundamentum siue demonstratio Antithesis, propositæ capite quarto libri primi Logisticæ: quia numeros sub contrario signo transferre, ex vna æquationis parte, ad oppositam, nihil est aliud, quam æqualibus æqualia addere. Vel ab æqualibus æqualia auferre.

Nota secundo. Si quantitates A & B, sint diuersi generis (puta si A sit linea, & B sit superficies) iuxta nos, non poterit dari vna quantitas C, quæ sit aggregatum quantitatum A & B. Ex quo fit, quod non sit possibilis additio duarum quantitatum diuersi generis: & similiter impossibile est quantitatem A subtrahere ex quãtitate alterius generis.

Nota tertio. Si quantitas A sit recta linea, & etiam quantitas B sit recta linea, ac deinde linea A lateraliter apponatur, vel imponatur lineæ B: per hoc non habebitur vna quantitas, quæ sit aggregatum linearum A & B; quare prædicto modo lineam A apponere, vel imponere lineæ B, non est addere illas lineas A & B. Idem verum est de alijs lineis, superficiebus, corporibus, & etiam de numeris. Quis enim admittet 43, esse productum ex additione 4 & 3? patet tamen, ex appositione numerorum 4 & 3, haberi 43, vel 34. Vt additione vniuersali, habeatur productum ex additione numerorum 4 & 3, duo illi numeri successiuè scribuntur interposito signo †: atque adeo ex hac additione productum est 4 † 3, quod habetur appositione: sed vt illic monuimus, productum ex additione vniuersali, non est productum ex additione, sed tantum scriptio significans quid faciendum sit, vt habeatur productum ex additione. Quod etiam verum est, de vniuersali multiplicatione, atque diuisione.

Additio Arithmetica, dicitur, in qua quantitates discretæ adduntur. Additio Geometrica, est in qua quantitates continuæ adduntur. Subtractio Arithmetica, appellatur, in qua vna quantitas discreta, subtrahitur ex altera discreta quantitate. Subtractio Geometrica, vocatur illa subtractio, in qua vna quantitas continua, subtrahitur ex altera quantitate continua. Non admittimus scriptionem Logisticam indicantem subtractionem Arithmeticam aut Geometricam vt dicemus capite 9. Vt distinguas scriptiones Logisticas, repræsentantes additionem, Arithmeticam, à scriptione Logistica, quæ repræsentat additionem, Geometricam: notandum, scriptionem Logisticam in qua duæ quantitates connectuntur signo † vel — indicare additionem Arithmeticam, si illi expressè non apponatur aliquid, indicans significari additionem Geometricam. Quoties vero scriptioni aliquid

tale expreſsè appoſitum eſt, indicat additionem Geometricam. Exempli gratia, prima ſcriptio ſit A † B. Secunda ſit linea A † B. Tertia ſit arcus A † B. Quarta ſit Angulus A † B. Quidcunque tandem ſignificent litteræ A & B in ipſa hypotheſi, prima ſcriptio indicabit additionem Arithmeticam; reliquæ indicant additionem Geometricam. Cæterum plerumque parum refert an ſcriptio indicet Arithmeticam, vel Geometricam additionem. Etenim facta hypotheſi quod A & B ſingulæ ſint quantitates continuæ eiuſdem generis, ſcriptio A † B indicabit additionem, cuius productum erit quantitas diſcreta, ſed æquiualens quantitati continuæ, quæ habetur ex Geometrica additione, quantitatum continuarum A & B.

Quid ſit ductus Geometricus, pluribus expoſuimus cap. 3. quibus ſi accedant, quæ hic remanent dicenda de Arithmeticis ductibus, atq; reductibus: ſatis conſtabit, quomodo ſingulis nominatis ductibus Geometricis, reſpondeant reductus Geometrici: & quid ſint illi reductus Geometrici. Quantitatē diſcretam A, ducere in quantitatem diſcretam B: eſt inuenire quantitatem diſcretam C, ita vt 1 *ad* A = B *ad* C: Exempli gratia, numerum 4 ducere in numerum 3, eſt iuuenire numerum 12, ita vt 1 *ad* 4 = 3 *ad* 12. Hinc ductus numeri A, in numerum B: eſt inuentio numeri C, ita vt 1 *ad* A = B *ad* C. Quid vero ſit 1 *ad* A = B *ad* C, ſiue quid ſit duas rationes inter ſe æquari, pluribus exponendum eſt in quarta parte huius Ideæ.

Quantitatem diſcretam C, reducere ſiue diuidere per quantitatem diſcretam A: eſt inuenire diſcretam quantitatem B, ita vt A *ad* C = 1 *ad* B: exempli gratia, numerum 12, reducere, ſiue diuidere per numerum 4: eſt inuenire numerum 3, ita vt 4 *ad* 12 = 1 *ad* 3. Hinc reductus, ſiue diuiſio numeri C, per numerum A: eſt inuentio numeri B, ita vt A *ad* C = 1 *ad* B. Multiplicatio Arithmetica, ſiue ductus Arithmeticus, eſt ductus vnius quantitatis diſcretæ, in aliam quantitatem diſcretam. Diuiſio Arithmetica, ſiue reductus Arithmeticus, eſt reductus vnius quantitatis diſcretæ, per aliam quantitatem diſcretam.

Arithmetica diuiſio numeri C, duplicem admittit caſum. Primus eſt, quando datur, ſiue aſſignatur numerus per quem diuidi debet numerus C. Secundus caſus eſt quando non aſſignatur numerus, per quem diuidi debet numerus C, ſed ſcitur, quod hic numerus, ſiue diuiſor non aſſignatus, ſit æqualis diuiſionis producto quod petitur. In primo caſu, diuiſio retinet nomen diuiſionis, ſiue ſimpliciter appellatur diuiſio. In ſecundo caſu, diuiſio appellatur extractio primæ radicis. Hinc diuiſio pro vt paulo ante à nobis definita eſt, diſtinguitur in diuiſionem, & radicis extractionem. Vt circa numerum C inſtituatur diuiſio contradiſtincta à radicis extractione,

ctione, non sufficit quod cognitus sit numerus C, qui diuidi debet: sed insuper debet esse cognitus alius numerus, per quem diuidi debet numerus C: vt circa numerum C instituatur radicis extractio, sufficit quod datus siue cognitus sit numerus C; adeo vt diuisio contradistincta à radicis extractione, ab ipsa radicis extractione, fere ita differat, sicut ductus indicatus à scriptione A *in* B, differt à ductu indicato à scriptione A *in* A. Vt prior ductus absoluatur debent cognosci duæ quantitates A & B vt secundus ductus absoluatur, sufficit cognoscere quantitatem A. Hæ diuersæ multiplicationes, diuersum nomen non habent, quia eadem praxi atque facilitate absoluuntur: verum radicis extractio habet maiorem difficultatem, & requirit praxim diuersam, à praxi vsitata pro diuisione, contradistincta à radicis extractione, vt hæc melius intelligantur, atque appareat radicis extractionem esse diuisionem: proderit reflectere ad sequentes scriptiones Logisticas, atque in illis proposita argumenta. Facta hypothesi quod A *in* A = C: legitime infertur: ergo 1 R 1 * C = A. Item ex eadem hypothesi legitimè infertur: ergo C *per* A = A. Similiter, ex eo quod 4 *in* 4. = 16. legitimè infertur: ergo 1 R 1 * 16 = 4. Item 16 *per* 4 = 4. Præterea qualescunque numeros significent litteræ A & C: ex eo quod 1 R 1 * C = A: legitimè sequitur, C *per* A = A, vt satis patet ex ipsa Logisticarum scriptionum expositione. Extractio primæ radicis numeri C, dici posset inuentio numeri A ita vt A *ad* C = 1 *ad* A. Quemadmodum ex numero C primam radicem extrahere, est inuenire numerum A ita vt C *per* A = A. Ex eodem numero C, secundam radicem extrahere, est inuenire numerum A, ita vt C *per* A *per* A = A. Pari modo ex numero C, tertiam radicem extrahere, est inuenire numerum A, ita vt C *per* A *per* A *per* A = A. Exempli gratia quia 4 = R 2 * 64. Etiam 64 *per* 4 *per* 4 = 4. Ex singulis ferè, quę hic diximus de radicum extractione: immò ex simplici scriptionum Logisticarum intelligentia, satis constat, definitionem diuisionis, siue reductus, conuenire radicum extractioni: atque adeo radicum extractiones, esse diuisiones, siue reductus. Vniuersim igitur quatuor operationes Logisticas admittimus: quarum prima, appellatur additio. Secunda vocatur subtractio. Tertia dicitur ductus, siue multiplicatio. Quarta est reductus, siue diuisio. Adeo vt operatio Logistica sit veluti genus, quod adæquatè diuiditur in prædicta quatuor genera operationum Logisticarum: quæ genera, paulò post, vlterius subdiuidemus, prius enim placet hic annotare aliquam differentiam, inter scriptiones Logisticas indicantes diuersam operationem, ex quatuor iam enumeratis operationibus Logisticis. Primam operationem Logisticam, siue additionem, indicat omnis, & sola

scriptio Logistica, in qua inueniuntur duæ quantitates connexæ signo † vel —. Exempli gratia, qualescunque sint quantitates A & B: sequentes scriptiones A † B, item — A — B, item A — B, item — A † B, significant additionem. Secundam operationem Logisticam, siue subtractionem, non significat vlla scriptio Logistica; & pro Logistica esset planè superflua scriptio subtractionem indicans, licet ipsa subtractio maximè vtilis sit, ac necessaria. Sic Ex. Gr. scriptiones A — B, item 8 — 3, non significant subtractionem faciendam circa quantitates his scriptionibus contentas, vt pluribus dicemus capite sequenti. Tertiam operationem Logisticam, siue ductum, aut multiplicationem, indicat omnis, & sola scriptio, in qua duæ quantitates, explicitè, vel implicitè, connectuntur particula in. Exempli gratia, in scriptione A *in* A, quantitates A & A explicitè connectuntur particula in. Verum in scriptione A 2, quæ æquiualet A *in* A, duæ quantitates A & A, implicitè connectuntur particula in: & A 2, tantum breuius repræsentat, idem illud, quod A *in* A, minus compendiosè exhibet. Quartam operationem Logisticam, siue diuisionem, aut reductum, indicat omnis & sola scriptio Logistica, in qua duæ quantitates, explicitè, vel implicitè, connectuntur particula per, aut lineola quæ diuisum significat. Exempli gratia, in scriptione A *per* B, quantitates A & B, explicitè connectuntur particula per. In scriptione 1 R 1 ⁎ 4, implicitè particula per connectuntur, numerus post asterismum scriptus, & totus numerus radicalis: nam 4 *per* 1 R 1 ⁎ 4, minus compendiosè repræsentat, idem illud, quod magis compendiosè repræsentat 1 R 1 ⁎ 4. Ex his satis constat, quam ex prædictis quatuor operationibus Logisticis, indicent scriptiones singulæ, quæ à nobis adhibentur ad indicandas operationes Logisticas: quoniam tamen singulæ prædictæ operationes Logisticæ, subdiuiduntur in Arithmeticas, & Geometricas, dicendum nobis est, quomodo differant scriptiones indicantes operationes Arithmeticas, ab illis operationibus Logisticis, quæ indicant Geometricas operationes; pro quo iuuabit in memoriam reuocare, quod agendo de ductibus monuimus, nimirum qualescunque sint quantitates A & B, tamen scriptionem A *in* B significare ductum Arithmeticum, & nullum alium ductum repræsentare. Similiter scriptiones Logisticæ, repræsentantes quamuis aliam, ex supra memoratis quatuor operationibus Logisticis, indicant operationes Arithmeticas, quoties in ipsa scriptione, expressè non apponitur aliquid, determinans tales scriptiones, ad indicandam operationem Geometricam. Sic exempli gratia, qualescunque fuerint quantitates A & B, tamen scriptiones A † B, item A — B, item, A *per* B, indicant operationes Arithmeticas, atque

litteræ

litteræ A & B, significant quantitates discretas, æquiualentes quantitatibus, quas in hypothesi significabant. Præterea supposito quod litteræ A & B in hypothesi non significent aliquam quantitatem, sed singulæ repræsentent, Exempli gratia, Angulum, sonum, motum, velocitatem, distantiam, &c. Tunc in prædictis scriptionibus, operationem indicantibus, litteræ A & B, significant quantitates discretas, quæ sunt mensuræ, vel certe æquiualent mensuris, illorum entium, quæ in hypothesi significantur per litteras A & B. Quoties verò in scriptione repræsentante aliquam operationem Logisticam, expressè apponitur aliquid determinans scriptionem, ad significandam operationem Geometricam tunc scriptio repræsentat Geometricam operationem. Exempli gratia, sequentes scriptiones repræsentant Geometricas operationes, linea A † B, item superficies A † B, item corpus A † B, item linea A − B, item Angulus A † B, item Angulus A − B: etenim voces linea, superficies, corpus, angulus, scriptionibus immediatè appositæ sufficienter determinant scriptionem, ad repræsentandam Geometricam operationem. Aduertendum hic est, quod licet scriptionum Logisticas operationes indicantium, ea sit natura, atque significatio quam exposuimus: tamen parui, aut fere nullius momenti est æquiuocatio, quæ causari potest ex eo capite, quod pro additione Geometrica intelligatur additio Arithmetica: vel etiam pro subtractione Arithmetica intelligatur subtractio Arithmetica, aut è contra; etenim manente eadem hypothesi, per additionem, & subtractionem, Geometricam atque Arithmeticam, habentur quantitates æquiualentes. Similis æquiuocatio in ductibus, aut reductibus, magis noxia esse potest: præsertim si pro vnius classis ductu Geometrico, intelligatur alterius classis ductus Arithmeticus. Etenim diuersarum classium ductus, aut reductus non producunt quantitates æquiualentes. Operatio Logistica, adæquatè diuiditur in quatuor genera operationum, nimirum in additionem, subtractionem, ductum, & reductum. Additio subdiuiditur in additionem Arithmeticam, & Geometricam. Similiter subtractio subdiuiditur in subtractionem Arithmeticam, & Geometricam: atque vlterius non subdiuiduntur operationes illæ. Ductus diuiditur in ductum Arithmeticum, & Geometricum. Ductum Arithmeticum vlterius non subdiuidimus. Ductum Geometricum subdiuidimus in ductum primum, secundum, tertium, & quartum. Reductus diuiditur in reductum Arithmeticum, & reductum Geometricum. Reductum Arithmeticum subdiuidimus in reductum, & radicis extractionem. Reductum Geometricum subdiuidimus in reductum primum, secundum, tertium, & quartum.

CAPVT

CAPVT IX.

Declaratur, quomodo aſſumptis à nobis ſcriptionibus Logiſticis, per genitores, non poſſit indicari productum ex ſubtractione: adeoque nullam à nobis adhiberi ſcriptionem Logiſticam indicantem ſubtractionem.

VT in ſcriptione Logiſtica diſtingueremus quantitates poſitiuas, à quantitatibus negatiuis, aſſumpſimus ſigna † & —. Horum ſignorum ſignificationem, ſatis expoſuimus, in parte ſecunda appendicis libri ſecundi Logiſticæ: quæque in dicta appendice indicauimus, aut circa quantitates poſitiuas, ac negatiuas: aut circa ſigna † & —, hoc loco non repeto, ſed cognita ſuppono, & conſequenter declaro verum eſſe, à nobis quidem adhiberi ſcriptiones Logiſticas, indicantes additionem, multiplicationem, diuiſionem: nullam tamen adhiberi ſcriptionem Logiſticam, indicantem ſubtractionem: vbi non nego ſcriptione Logiſtica exhiberi poſſe illud, quod producitur ex ſubtractione, ſcio enim numerum quinque exhiberi poſſe ſcriptione Logiſtica, & hunc numerum produci per ſubtractionem, in qua ex numero duodecim ſubtrahitur numerus ſeptem: ſed nego ſcriptione Logiſtica exhiberi poſſe duos numeros, ex quibus per ſubtractionem producitur numerus quinque; ſic vt illa ſcriptio æquiualeat ſcriptioni exhibenti numerum quinque: ſiue eo ipſo quod A — B = C, tunc quantitatem C, non eſſe productum quod per ſubtractionem producitur ex quantitatibus contentis altera parte æquationis: adeoque dici non poſſe, ſcriptionem A — B, indicare ſubtractionem: ſed dici debere, operationem indicatam à ſcriptione A — B, eſſe additionem. Quantitates vniformes appello quæ ſingulæ ſunt poſitiuæ, vel ſingulæ ſunt negatiuæ, ſiue quantitates ſimilibus ſignis affectæ. Quantitates difformes dicuntur quæ ſingulæ non ſunt poſitiuæ, aut ſingulæ non ſunt negatiuæ, ſiue quantitates diſſimilibus ſignis affectæ. In omni operatione Logiſtica, ex duabus quantitatibus producitur tertia aliqua quantitas, quæ dicitur producta, ſiue genita ex operatione. Quantitates ex quibus productum habetur, dicuntur genitores operationis Logiſticæ. Ex. Gr. illius additionis, per quam ex quantitatibus A & B, producitur quantitas C: genitores erunt quantitates A & B, quantitas genita,

nita, siue producta erit quantitas C. Similiter illius subtractionis, per quam ex numero 8; & numero 3, producitur numerus 5: genitores erunt numeri 8, & 3: productum, siue genitum, erit numerus 5. Ex duobus genitoribus operationis Logisticæ, vnus dicitur superior, alter inferior: quia saltem pro operationibus Arithmeticis, hoc ordine scribi consueuerunt. Genitor superior dicitur, cui alter additur, vel ex quo alter subtrahitur, vel qui in alterum ducitur, vel qui per alterum reducitur. Genitor inferior vocatur, qui alteri additur, vel qui ex altero subtrahitur, vel in quem alter ducitur, vel per quem alter reducitur. Ex. Gr. in sequentibus scriptionibus, Logisticam operationem indicantibus, quantitas significata per litteram A, est genitor superior. Quantitas significata per litteram B, est genitor inferior. A † B, item A — B, item A *in* B, item A *per* B, item R 1 * A; in hac vltima scriptione, quæ indicat diuisionem illam quæ radicis extractio dicitur, non repræsentatur genitor inferior.

His breuiter prænotatis, atque insuper suppositis, quæ capite 2. libri 1. Logisticæ, dicta sunt de scriptionibus, Logisticam operationem indicantibus; satis erit ostendere scriptionem 8 — 3 non indicare subtractionem, sed significare additionem; vt ita constet, nulla scriptione Logistica, per genitores indicari posse subtractionem: quod (si forte ex ipsis scriptionibus libro primo Logisticæ expositis, adhuc alicui non satis innotuit) pluribus argumentis probo, vt sic melius intelligatur sensus scriptionum Logisticarum.

Probatur primo. 8 — 3 = 5: igitur 5 est productum ex operatione Logistica significata per scriptionem 8 — 3: igitur si 5, est differentia genitorum contentorum scriptione 8 — 3: etiam scriptio 8 — 5, significat subtractionem. Verum si 5, est aggregatum genitorum contentorum scriptione 8 — 3: scriptio 8 — 3, significat additionem, vt patet ex ijs quæ de additione, & subtractione diximus capite præcedenti. Considera iam si placet genitores exhibitos scriptione 8 — 3; superior genitor constituitur ex octo vnitatibus positiuis; inferior genitor constituitur ex tribus vnitatibus negatiuis: sed neque octo vnitatibus positiuis addendo quinque vnitates positiuas, habentur tres vnitates negatiuæ, neque tribus vnitatibus negatiuis, addendo quinque vnitates positiuas habentur octo vnitates positiuæ: ergo quinque vnitates positiuæ, non sunt differentia genitorum contentorum scriptione 8 — 3: ergo hæc scriptio non indicat subtractionem: neque numerus 5, est productum ex abstractione genitorum contentorum scriptione 8 — 3. Rursus octo vnitatibus positiuis, addendo tres vnitates negatiuas, habentur, siue producuntur 5 vnitates positiuæ: ergo quinque vnitates positiuæ, sunt aggregatum genitorum contentorum

scriptio-

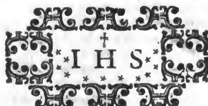
ſcriptione 8 — 3. Ergo hæc ſcriptio indicat additionem: & numerus 5, eſt productum ex additione genitorum contentorum ſcriptione 8 — 3.

Probatur ſecundo. Genitores contenti ſcriptione 8 — 3, ſunt 8 & — 3: ſed differentia numerorum 8 & — 3 eſt numerus 11: ergo numerus 5, non eſt differentia numerorum 8 & — 3: ergo numerus 5, non eſt differentia genitorum contentorum ſcriptione 8 — 3: ergo ſcriptio 8 — 3, non exhibet genitores, ex quibus per ſubtractionem producitur 5: atqui 8 — 3 = 5: ergo ſcriptio 8 — 3, non ſignificat aliquid æquale producto per ſubtractionem, ex genitoribus contentis ſcriptione 8 — 3: ergo hæc ſcriptio non ſignificat ſubtractionem faciendam circa genitores ſcriptione contentos.

Probatur tertio. Scriptio — 8 — 3, ſignificat additionem: ergo ſcriptio 8 — 3 ſignificat additionem.

Probatur quarto. Productum ex genitoribus contentis ſcriptione 8 — 3, eſt 5: quod productum inuenitur mediante ſubtractione, nimirum, ex octo poſitiuis vnitatibus auferendo tres vnitates poſitiuas: ergo genitores, ex quibus per ſubtractionem habetur numerus 5, ſunt octo vnitates poſitiuæ, & tres vnitates poſitiuæ: ſed hi genitores non repræſentantur in ſcriptione 8 — 3, quæ repræſentat octo vnitates poſitiuas, & tres vnitates negatiuas: ergo ſcriptio 8 — 3, non repræſentat genitores, ex quibus per ſubtractionem naſcitur numerus 5: ſed ſcriptio 8 — 3 repræſentat operationem, per quam ex genitoribus hac ſcriptione contentis, naſcitur numerus 5: ergo ſcriptio 8 — 3, non ſignificat ſubtractionem.

Probatur quinto. Non aſſumitur à nobis ſcriptio Logiſtiſtica indicans ſigni mutationem, in quantitate B: ſed vt ſcriptione Logiſtica indicemus quantitatem B ſubtrahendam ex quantitate A, requiritur mutatio ſigni in quantitate B: ergo vt ſcriptione Logiſtica indicemus quantitatem B, ſubtrahendam ex quantitate A, requirimus aliquid quod nulla Logiſtica ſcriptione exhibemus: ergo nulla Logiſtica ſcriptione exhibemus, quantitatem B ſubtrahendam, ex quantitate A.



CAPVT

CAPVT X.

Proportio, & æquatio, diuiditur in continuam, & discretam: atque declaratur, qualem æquationem aut proportionem, significent singulæ scriptiones Logisticæ.

EX ijs quæ diximus de operationibus Logisticis, constat, quod qualescunque quantitates significent litteræ A & B, tamen scriptiones Logisticas A † B, item A − B, item A *in* B, item A *per* B, significare operationes Arithmeticas: atque scriptionem indicantem operationem Logisticam, tunc tantum indicare operationem Geometricam, quando ipsi scriptioni expressè apponitur aliquid, quod eam determinet ad significandam Geometricam operationem. Idem propemodum hic statuimus, de scriptionibus Logisticis, quæ significant proportionem, aut æquationem.

Hic aduertendum quod licet aliqua proportio sit æquatio, tamen non omnis proportio sit æquatio. Similiter licet aliqua æquatio sit proportio, tamen non omnis æquatio sit proportio. Capite 6 exposuimus quid sit proportio, & diximus, proportionem adæquatè diuidi, in proportionem maioris inæqualitatis, proportionem minoris inæqualitatis & proportionem æqualitatis. Eo ipso quod proportio A *ad* B, sit proportio maioris, aut minoris inæqualitatis: impossibile est, A = B. Verum eoipso quod proportio A *ad* B, sit proportio æqualitatis: necessarium est, A = B. Præterea supposito quod A = B: fieri quidem potest, vt A *ad* B habeat proportionem æqualitatis: sed tamen non est necessarium, vt A *ad* B habeat proportionem æqualitatis. Supposito quod A = B, quodque insuper A & B sint quantitates eiusdem generis, Exempli gratia numeri: tunc etiam A *ad* B, habebit proportionem æqualitatis. Verum supposito quod A = B: tunc A *ad* B non habebit proportionem æqualitatis: si insuper supponatur, vel quod A & B sint rationes: vel quod A & B, sint quantitates diuersi generis inter se æquiualentes. Etenim supposito quod A & B sint rationes inter se æquales: tunc A *ad* B non hebebit proportionem æqualitatis, sed habebit proportionalitatem æqualitatis, quæ à proportione æqualitatis tantum differt, quantum proportionalitas differt à proportione. Rursus supposito quod A sit quantitas continua, æquiualens

quantitati discretæ B: erit verum A = B, nimirum illa æquatione quam æquiualentem appellamus: sed tamen A *ad* B, non habebit vllam proportionem, aut æqualitatis, aut inæqualitatis: quandoquidem nulla proportio inueniatur inter quantitates diuersi generis. Ex his satis patet quod aliqua, sed non omnis proportio sit æquatio: & insuper aliqua, sed non omnis æquatio sit proportio; quamobrem, in titulo huius capitis, distinguimus proportionem & æquationem: per hoc tamen non accedimus ad partes modernorum quorumdam Mathematicorum, qui non admittunt proportionem æqualitatis, & negant exempli gratia numerum 4 ad numerum 4 habere vllam proportionem; quod tenentur facere, qui tuentur compositionem rationum esse rationum additionem: qua de re plura inuenies in quarta parte huius Ideæ. Proportio continua, à nobis appellatur, proportio quæ est quantitas continua: siue proportio cuius termini sunt quantitates continuæ. Proportio discreta, dicitur proportio, quæ est quantitas discreta: siue proportio cuius termini sunt quantitates discretæ. Exempli gratia, proportio lineæ A ad lineam B, est proportio continua. Et proportio numeri A ad numerum B, est proportio discreta.

Æquatio continua, vocatur æquatio, in qua quantitates continuæ dicuntur æquales. Æquatio discreta, est æquatio, in qua quantitates discretæ dicuntur æquales. Æquatio æquiualens, dicitur, quando quantitates asseruntur æquales, quæ tantum inter se æquiualent. Hinc æquatio continua idem significat ac æquatio continuarum quantitatum. Æquatio discreta, idem est ac æquatio discretarum quantitatum. Denique æquatio æquiualens, idem est ac æquiualentia quantitatum. Quodque hic de quantitatibus dicimus, intelligendum tam de quantitatibus absolutis, quam de proportionibus: item de quantitatibus propriè, & impropriè dictis.

Scriptio Logistica indicans proportionem, aut æquationem, indicabit proportionem, aut æquationem discretam, quoties illi expressè non apponitur aliquid, à quo determinetur ad significandum continuam proportionem, aut æquationem; quoties vero illi expressè aliquid apponitur, à quo determinetur, ad significandum continuam proportionem, aut æquationem: tunc significabit continuam proportionem, aut æquationem. Denique, si vni parti æquationis, expressè aliquid apponatur, eam partem determinans ad significandam quantitatem siue proportionem continuam: & in altera parte inueniatur quantitas discreta: tunc æquatio, erit æquiualens. Exempli gratia, qualescunque fuerint quantitates significatæ à litteris A, B, C, D, scriptiones Logisticæ A *ad* B, item C *ad* D, singulæ significant proportionem discretam. Et similiter scriptiones Logisticæ A *ad* B = C *ad* D,

item

item A † B = C, item A *in* B = C: singulæ significant æquationem discretam. Verum scriptiones Logisticæ, linea A *ad* B, item superficies A *ad* B, item A *in* B ductu 1 *ad* B *in* C ductu 2, singulæ significant proportionem continuam. Præterea, scriptiones Logisticæ, linea A † B = C, item Angulus A † B = C, item linea A *ad* B = C *ad* D, item A *in* B ductu 1 = B *in* C ductu 4, singulæ significant æquationem continuam. Denique, scriptiones Logisticæ, linea A *ad* B = 2 *ad* 4, item A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 6 *ad* 3, singulæ significant æquationem æquiualentem.

Nō erit inutile hic aduertere, apud Mathematicos passim vsitatas esse loquutiones, in quibus asseratur, Ex. Gr. quadratum lineæ A ad quadratū lineæ B, æquari 4 *ad* 2. Vel proportionē quadrati lineæ A, ad quadratum lineæ B, esse æqualem proportioni, quā habet numerus 4, ad numerum 2: atque hoc idem exhibet scriptio Logistica A *in* A ductu 1 *ad* B *in* B ductu 1 = 4 *ad* 2, supposito quod litteræ A & B, singulæ significent rectam lineam. Iam vero, si rectè expendas, hos, vel similes loquendi modos, maximè vsitatos: aduertes, in illis asseri proportionem continuam, æquari proportioni discretæ; & quoniam proportio continua, est quantitas continua: atque proportio discreta, est quantitas discreta: etiam in dictis loquutionibus asseritur, quod quantitas continua æquetur quantitati discretæ. Denique, quia idem est, duo æquari inter se, vel habere proportionem æqualitatis: etiam in dictis loquutionibus asseritur, proportio inter quantitatem continuam, & quantitatem discretam: & tamen Mathematicorum nullus admittit proportionem, inter duas diuersi generis quantitates, quales sunt, quantitates continuæ & discretæ. Quid ad insinuatam difficultatem alij respondeant, ignoro: suspicor tamen, hanc esse vnam ex illis difficultatibus, à quibus perterriti Mathematici aliqui moderni, ab antiquioribus Mathematicis paulatim declinando, tandem eo deuenerunt, vt negent, numerum 4 ad numerum 4 habere vllam proportionem: aut dari vllam proportionem, inter duas eiusdem generis quantitates, quæ inter se æquales sint; atque hoc tenentur negare, qui tuentur rationum compositionem, nihil aliud esse quam rationum additionem: vt iterum monuimus initio huius capitis. Quid ad propositam difficultatem respondendum sit iuxta nostra principia, satis patet ex ijs quæ hic diximus de æquationibus æquiualentibus. Etenim quando proportio continua, dicitur esse eadem, similis, vel æqualis, proportioni discretæ: tantum asseritur æquatio æquiualens: & sensus est, quod proportio continua, æquiualeat discretæ: ex quo tantū sequitur, quantitatē continuam æquiualere discretæ quantitati: quod nos admittimus, sed tamen non admittimus, quantitatem continuam, æquari posse, discretæ quantitati.

CAPVT XI.

Declarantur proportiones indifferentes, quas admittimus, inter quantitates positiuas & negatiuas: hoc est, inter difformes eiusdem generis quantitates.

Logisticæ nostræ lex est, per signa † & — ab inuicem distingui, quantitates positiuas, & negatiuas: atque in scriptione Logistica, omnes, & solas illas quantitates esse negatiuas, quæ expressè præfixum habent signum —: reliquas omnes quantitates esse positiuas. Hæc lex, adæquate dependet à nostro beneplacito: liberum enim nobis erat, ad significandas positiuas quantitates, assumere. Ex. Gr. Latinas litteras: & Græcis litteris, indicare quantitates negatiuas: aut alio quouis modo positiuas quantitates distinguere à negatiuis. Similiter à nostro beneplacito dependet altera lex nostræ Logisticæ, præscribens, signa † & —, in quantum sunt characteres compositionis, atque connectunt duas quantitates, æquiualere his vocibus,& insuper,& præterea, simul cum. De his legibus, atque significationibus signorum † & —, egimus in Appendice libri secundi Logisticæ; quoniam verò signa † & —, in quantum sunt characteres compositionis, significant duas quantitates simul sumptas, hoc est productum ex additione: satis patet, productum ex additione significari à scriptione Logistica, in qua duæ quantitates, signo † aut — connexæ inueniuntur. Sic Ex. Gr. scriptio 4 † 8 significat quatuor vnitates positiuas, simul sumptas cum 8 vnitatibus positiuis. Item scriptio 4 — 8: significat quatuor vnitates positiuas, sumptas simul cũ octo vnitatibus negatiuis. Item scriptio — 4 — 8: significat quatuor vnitates negatiuas, sumptas simul cum octo vnitatibus negatiuis. Licet singulæ istæ scriptiones Logisticæ, aut aliæ quæuis, in quibus duæ quantitates signis † vel — connectuntur, significent productum ex additione, siue productum ex duabus quantitatibus simul sumptis: tamen in his scriptionibus duplex casus distingui potest; primus casus est, quando productum à scriptione Logistica significatum, oritur ex genitoribus, qui inter se vniformes sint: hoc est ex duabis positiuis, vel certe ex duabis negatiuis quantitatibus, simul sumptis. Secundus casus est, quando productum à scriptione Logistica significatum, oritur ex genitoribus, qui inter se difformes sint: hoc est ex positiua, & negatiua quan-

quantitate simul sumpta. In primo casu productum ex additione, significatum à scriptione Logistica, habetur per eam praxim, siue operationem, quæ vocatur additio. In secundo casu productum ex additione significatum à scriptione Logistica, habetur pe: eam praxim, siue operationem, quæ dicitur substractio. Quoniam verò vnitates positiuæ, & negatiuæ, simul addi possunt: satis patet vnitates positiuas esse eiusdem generis cum vnitatibus negatiuis: neque vllas quantitates inter se genere discrepare, per hoc præcisè, quod vna sit positiua, altera sit negatiua; & quia inter quantitates eiusdem generis, nagari non potest proportio: concedendum est Ex.Gr. 4 *ad* − 4 habere proportionem: & similiter − 4 *ad* 4 habere proportionem. Has proportiones appello indifferentes: vtraque enim proportio est indifferens, vt vocetur proportio maioris, aut minoris inæqualitatis. Itaque proportio indifferens definiri potest, quantitas habens abstractam relationem magnitudinis, ad difformem eiusdem generis quantitatem. Quæuis huiusmodi proportio, est indifferens, vt vocetur proportio maioris, aut minoris inæqualitatis: tales sunt Ex.Gr. 4 *ad* − 4. Item − 4 *ad* 4. Item 2 *ad* − 7. Item − 7 *ad* 2. singulæ sunt proportiones indifferentes; Etenim quatuor vnitates positiuæ, possunt dici aliquid maius, quatuor vnitatibus negatiuis, in quantum scilicet $4 = -4 + 8$: hoc est in quantum quatuor vnitates positiuæ, æquantur quatuor vnitatibus negatiuis, sumptis simul cum octo vnitatibus positiuis: atque adeo quatuor vnitatibus negatiuis, additur aliquid, vt æquentur quatuor vnitatibus positiuis. Rursus quatuor vnitates negatiuæ, possunt dici aliquid maius, quatuor vnitatibus positiuis: nimirum, in quantum $-4 = 4 - 8$: hoc est, in quantum quatuor vnitates negatiuæ, æquantur quatuor vnitatibus positiuis, sumptis simul cum octo vnitatibus negatiuis: atque adeo quatuor vnitatibus positiuis, aliquid addendum sit, vt æquenter quatuor vnitatibus negatiuis. Simili planè modo patet, quomodo vtraque proportio, 4 *ad* − 4: item − 4 *ad* 4: possit dici minoris inæqualitatis, nimirum, in quantum $4 - 8 = -4$: item $-4 + 8 = 4$. Præterea ex eodem capite ex quo patet, proportiones, 4 *ad* − 4: item − 4 *ad* 4: posse dici maioris inæqualitatis: etiam manifestum est, 4 *ad* − 4 = − 4 *ad* 4; nam vtriusque proportionis consequenti termino, addendo duplum antecedentis termini, habetur quantitas æqualis antecedenti termino. Iam verò ex eo, quod 4 *ad* − 4 = − 4 *ad* 4: facile patet, etiam 3 *ad* − 10 = − 3 *ad* 10: & vniuersaliter, qualescunque eiusdem generis quantitates fuerint A & B, tamen A *ad* − B = − A *ad* B.

Ex his, atque fundamento nostro de rationibus proponendo in parte

parte quarta huius Ideæ, immediatè patet, demonſtratio problematis 3 cap. 3 lib. primi Logiſticæ: qualeſcunque enim quantitates eiuſdem generis fuerint A & B, atque A *in* B = C: tunc − A *in* − B = C. Item A *in* − B = − C. Etenim per hypotheſim A *in* B = C ergo per dicta de ductibus. 1 *ad* A = B *ad* C. ergo per hic dicta, 1 *ad* A = − B *ad* C: ergo per fundamentum de rationibus − A *in* − B = 1 *in* C: ſed 1 *in* C = C: ergo − A *in* − B = C. Rurſus per hypotheſim A *in* B = C. ergo 1 *ad* A = B *ad* C: ergo 1 *ad* A = − B *ad* − C: ergo A *in* − B = 1 *in* − C: ſed 1 *in* − C = − C: ergo A *in* − B = − C.

Praxis, ſiue problema noſtræ Logiſticæ, cuius probationem hic attulimus: etiam videtur vſitatum eſſe, apud Algebræ ſcriptores; apud quos, hactenus non inueni, problematis demonſtrationem; qua ſi Algebra hactenus caruit, atque adeo noſtræ Logiſticæ, debeat illam demonſtrationem: maiori beneficio, Algebra, noſtræ Logiſticæ obſtricta erit: quam Logiſtica noſtra, Algebræ obſtringatur: à qua, ſi aliquid accepit, vnum, vel certe præcipuum dici debet, modus adhibendi poſitiuas quantitates, ſimul cum negatiuis: atque illud ipſum problema, cuius demonſtrationem hic attulimus.

CAPVT XII.

Affertur cauſa, quare à nobis axiomata proponuntur, modo, ab alijs non vſitato.

Axioma rigoroſum, eſt propoſitio, cuius veritas, ex ipſa terminorum, ſiue vocum intelligentia, immediatè manifeſta eſt. Singula eiuſmodi rigoroſa axiomata, quæ in diſcurſibus adhibentur, ſeparatim non annotantur à Mathematicis: tamen ſeperatim, ac ſimul proponi conſueuerunt, illa axiomata rigoroſa, quæ frequentius adhibentur, & magis digna ſunt diſtincta conſideratione. Antequam hic enumerem, atque proponam, præcipua axiomata rigoroſa, quibus innituntur noſtri diſcurſus Logiſtici: pauca putaui præmonenda, ne ab ijs repræhendar, qui antiquitati debitam venerationem exigunt, & iure merito auerſantur nouitates, nulla vrgenti vtilitate, aut neceſſitate inductas. Itaque cauſam affero, quare modo aliquo non vſitato, proponam axiomata rigoroſa, Logiſticæ noſtræ inſeruientia: licet illa axiomata, ſaltem maxima ex parte, eadem ſint, cum axiomatibus, quæ ab antiquioribus Mathematicis fuerunt annotata: atque Euclideis elementis inſerta, vſque in hunc diem adhibentur in ſcholis Mathematicis: & fortaſſis tanto temporis interuallo, vix

aliam

aliam mutationem subierunt, quam quod ex vno ideomate, ad aliud fuerint translata. Quod hic aliqua axiomata proponam, modo aliquantum diuerso, quam ab alijs proponi consueuerint: præcipua causa est, quod maximè abhorream æquiuocationes: quas, vt pro viribus declinarem, longior fui in definitionibus, hactenus propositis. An verò Euclidea axiomata, in Mathematicorum scholis passim adhibita, æquiuocationibus obnoxia sint, in vno, vel altero axiomate consideremus: atque imprimis expendamus axioma asserens totum sua parte maius esse, quod habetur inter maximè manifesta, atque à me alijs verbis proponitur. Quæro igitur quid significent voces, totum, & pars? Dubitandi ratio est, quia si Grammaticos consulas, complexum ex anima & corpore, est aliquod totum, cuius partes sunt anima & corpus: tamen hoc totum, siue complexum ex anima & corpore, ipso corpore maius esse, non sequitur ex prædicto axiomate. Præterea ex prædicto axiomate, male inferes, totum lineæ curuitatem necessario maiorem esse curuitate partiali, siue quæ vni parti conuenit: aut totum rectæ lineæ rectitudinem, maiorem esse rectitudine partis. Rursus aggregatum ex quadrata superficie & recta linea, est aliquod totum, cuius partes sunt quadrata superficies & recta linea: & tamen aggregatum ex quadrata superficie & recta linea, ipsa quadrata superficie maius esse, non asserit axioma, affirmans totum sua parte maius esse; immò in stricta Mathesi planè falsum est, aggregatum ex quadrata superficie & recta linea, ipsa quadrata superficie maius esse. Deinde falsum est punctum esse partem lineæ. Item lineam esse partem superficiei. Item superficiem esse partem corporis. Hinc in alio eiusdem strictæ Matheseos axiomate, asseritur, duas rectas lineas nullam partem communem habere posse, sed tantum vnicum punctum commune habere. Et similiter duas planas superficies nullam partem, sed tantum vnicam rectam lineam communem habere posse. Quid igitur intelligendum per voces, totum, & pars, in eo strictæ Matheseôs axiomate, quod asserit, totum sua parte maius esse? Certe voces, totum & pars, intelligi non possunt in ea significatione, quam habent apud Grammaticos, aut in vsu familiari: vt satis patet ex ijs, quæ hic annotauimus: atque adeo æquiuocationi obnoxiæ sunt. Præterea, meo quidem iudicio, leuis aliqua, strictæ Matheseos peritia non sufficit, ad statuendum, quæ sit diuersitas, inter sensum, quo voces totum & pars intelligi debent in prædicto axiomate: & sensum, quem alibi admittunt: idque statuere, adhuc difficilius erit, si hactenus dictis addas, quod aggregatum, Exempli gratia, ex quinque vnitatibus positiuis, & duabus vnitatibus negatiuis, fit aliquod totum: immò iuxta nos fit aliquod

produ-

productum ex additione: & tamen nullus non videt, illud, ſiue aggregatum, ſiue productum ex additione, non eſſe maius ſua parte, ſiue quinque vnitatibus poſitiuis. Si aliquis opinetur, productum ex quinque vnitatibus poſitiuis, ſimul ſumptis, cum duabus vnitatibus negatiuis, non eſſe productum ex additione: ſed eſſe productum ex ſubtractione: quia inuenitur per eam operationem, quæ dicitur ſubtractio: vel certe exiſtimet de ſola voce, inſtitui inutilem quæſtionem, ab eo, qui inquirit, an productum illud ſit productum ex additione, aut ex ſubtractione: hanc ab eo gratiam peto, vt demonſtratam exhibeat veritatem problematis 3.libri 1.noſtræ Logiſticæ nobis cum Algebra commune: atque hoc præſtet, non aſſumendo quod nos præcedenti capite ad hunc finem aſſumimus: nimirum productum ex quinque vnitatibus poſitiuis, ſimul ſumptis cum duabus vnitatibus negatiuis, eſſe productum ex additione. Ex pluribus hæc pauca annotaſſe ſatis erit, vt conſtet, quare principia nobis cum Euclide communia non proponamus eodem modo, ſiue iiſdem verbis, quibus proponuntur ab Euclide, aut eius commentatoribus. Præterea ſingulas propoſitiones inter axiomata enumeratas ab Euclide, non proponimus inter noſtra rigoroſa axiomata: cauſa eſt, vel quod iſtis propoſitionibus non indigeamus, vel certe quod nobis non videantur tales, quæ dici poſſint axiomata rigoroſa. Exempli gratia, quæ mutuo ſibi congruunt æqualia eſſe, affirmatur in vna ex propoſitionibus, quæ apud Euclidem enumerantur inter axiomata, hac propoſitione non indigemus in eo ſenſu in quo per ſe nota eſt, vt hunc ſenſum declarem, quæro, quid maius ſit extima ſuperficies cubi lignei, aquæ immerſi: vel intima ſuperficies aquæ, cui cubus ligneus immerſus eſt? An fortè negari poteſt, extimam ſuperficiem cubi lignei aquæ immerſi, congruere intimæ ſuperficiei aquæ ambientis cubum ligneum? Hoc tamen conceſſo, ſubſumo, atqui quæ congruunt ſunt æqualia: & infero, ergo extima ſuperficies cubi lignei aquæ immerſi, æquatur intimæ ſuperficiei aquæ ambientis cubum ligneum; & ſi rurſus ſubſumatur, atqui intima ſuperficies aquæ ambientis cubum ligneum, continet extimam ſuperficiem cubi lignei: legitimè inferetur: ergo ſuperficies continens æquatur ſuperficiei contentæ: & datur aliquod continens, quod non ſit maius ſuo contento. Ego certe induci non poſſum, vt concedam vltimum conſequens, illatum in argumento propoſito: quod tamen videtur legitimè ſequi, atque ex veris præmiſſis inferri, ſi verum eſt, extimam ſuperficiem cubi lignei aquæ immerſi, eſſe aliquid diſtinctum, atque diuerſum, ab intima ſuperficie aquæ ambientis cubum ligneum. Si verò aſſeratur extimam ſuperficiem cubi lignei aquæ immerſi, non eſſe aliquid diuerſum, ab in-

tima

tima superficie aquæ ambientis cubum ligneum; vel negari debebit extimam superficiem cubi lignei aquæ immersi, congruere intimæ superficiei aquæ ambientis cubum ligneum: vel certe concedendum erit, idem sibi ipsi congruere posse: immò superficies, aut lineas, quæ sibi congruunt, non esse inter se diuersas: sed esse aliquid idem: & consequenter Euclideum principium, asserens æqualia esse, quæ sibi congruunt, nihil aliud significabit, quam idem seipso neque maius, neque minus esse: quo sensu maximè rigorosum axioma est, atque per se notum: verum si propositio, asserens æqualia esse quæ sibi mutuo congruunt, nihil aliud significet, quam propositio asserens idem seipso neque maius, neque minus esse: atque hæc secunda propositio nulli æquiuocationi obnoxia, ex ipsis terminis nota sit, prior verò propositio & obscurior sit, & æquiuocationibus obnoxia; quare secunda, pro priore non substituitur: aut prior, sine legitima declaratione, inter axiomata numeratur? quid ad hoc respondeam ignoro. Quid respondendum sit libenter discam, non acquiescerem tamen, si aliquis mihi responderet, prædictum Euclideum principium tollere, nihil aliud esse, quam totam fere Euclidis Geometriam destruere: quæ fere tota, aut immediatè, aut mediatè innitur principio in quo asseritur æqualia esse, quæ sibi mutuo congruunt; vel enim principium illud, adhibetur in sensu in quo verum est: vel adhibetur in sensu in quo est falsum: si primum exponendo principij sensum nihil derogatur doctrinæ, quæ ex illo deducitur, sed potius tali doctrinæ maximè vtile lumen affertur. Si secundum doctrina Euclidea non meretur defendi, vtpotè malè stabilita. Inquirere quo sensu prædictum principium adhibeatur ab Euclide; nihil facit ad præsens institutum; etenim quæ de Euclideis principijs, siue axiomatibus hactenus dicta sunt, alio fine non attulimus, quam ne videremur nulla vrgenti vtilitate, aut necessitate, aliquid mutare circa axiomata ab Euclide tradita, & satis communiter admissa, atque adhibita ab alijs Mathematicis: in quem finem pauca hæc videntur abundè sufficere.



CAPVT XIII.

Proponuntur aliquæ propoſitiones, quibus, tanquam principijs vtimur, in ſequentibus partibus huius Ideæ.

PRæſuppoſitis, terminorum, ſiue vocum expoſitionibus, traditis in præcedentibus capitibus: aſſerimus nonnullas propoſitiones; quas ſine vlteriori probatione aſſumimus, in diſcurſibus Logiſticis, ſubſequentium partium huius Ideæ. Primo loco, propono propoſitiones quas (ſuppoſita terminorum intelligentia) exiſtimo per ſe, ſiue lumine naturæ, notas eſſe: atque adeo dici poſſe axiomata rigoroſa. Secundo loco, affero aliqua poſtulata. Tertio loco, propono nonnullas propoſitiones, quæ per ſe notæ non ſunt, ſed ex alijs notioribus deduci, atque inferri poſſunt, eas tamen non probo, ſed ſine vlteriori probatione tanquam principia adhibeo, ac proinde appello axiomata non rigoroſa, ſiue hypothetica.

AXIOMATA RIGOROSA.

I. DVo producta, ex eadem operatione Logiſtica, ſunt inter ſe æqualia: quando ſuperiores genitores inter ſe, & inſuper inferiores genitores inter ſe, ſunt æquales.

Hinc, qualeſcunque fuerint quantitates A, B, C, D: ita tamen, vt A = B: & inſuper C = D: legitimè ſequetur: ergo primo, A † C = B † D. Secundo, A – C = B – D. Tertio, A *in* C = B *in* D. Quarto, A *per* C = B *per* D. Quinto, 1 R 1 * A = 1 R 1 * B. Sexto, Angulus A † C = angulo B † D. Septimo, Angulus A – C = angulo B – D.

II. Duo producta, ex eadem operatione Logiſtica, ſunt inter ſe inæqualia: quando inter ſe æquales ſunt, vel duo ſuperiores genitores, vel duo inferiores genitores: & tamen reliqui duo genitores, inter ſe non æquantur.

Hinc qualeſcunque fuerint quantitates A, B, C, D: ita tamen, vt A = B:

A = B : & tamen C *non* = D. Legitimè sequitur ergo, Primo, A † C *non* = B † D. Secundo, A – C *non* = B – D. Tertio, A *in* C *non* = B *in* D. Quarto, A *per* C *non* = B *per* D. Quinto, 1 R 1 * C *non* = 1 R 1 * D. Sexto Angulus A † C *non* = Angulo B † D.

III. Duo producta, ex ductibus nominatis eiusdem classis, sunt inter se æqualia, vel æquiualentia: quando superiores genitores inter se, & insuper inferiores genitores inter se, sunt æquales, vel æquiualentes.

Hinc qualescunque fuerint quantitates A, B, C, D: ita tamen, vt quantitates A & B, vel æquentur, vel æquiualeant inter se; & insuper quantitates C & D, inter se, vel æquentur, vel æquiualeant: legitimè sequitur: ergo, A *in* C ductu alicuius classis = B *in* D ductu eiusdem classis.

IV. Productum per additionem, ex genitoribus vniformibus, est maius, quouis suo genitore.

Hinc qualescunque sint quantitates A & B: ita tamen, vt vtraque sit positiua, vel vtraque sit negatiua: atque ex illarum additione producatur quantitas C; legitimè sequitur: ergo, Primo, C est maius A. Secundo, C est maius B.

V. Productum per subtractionem, ex genitoribus vniformibus, est minus superiori genitore.

Hinc qualescunque sint quantitates A & B: ita tamen, vt vtraque sit positiua, vel vtraque sit negatiua; atque ex A, subtrahendo B, producatur C: legitimè sequitur, A esse maius C.

VI. Quantitates, eidem tertiæ quantitati æquales, vel æquiualentes: inter se sunt æquales, vel æquiualentes.

Hinc qualescunque fuerint quantitates A, B, C: ita tamen, vt A = C: & insuper B = C: legitimè sequitur ergo A = B.

VII. Recta linea, cum altera recta linea, aut plana superficie, tantum concurrit in vnico puncto.

Hinc legitimè sequitur: puncta X & Z, sunt in recta linea A B: & insuper puncta X & Z, sunt in plana superficie, aut recta linea C D, cum qua concurrit recta linea A B: ergo puncta X & Z, non sunt diuersa. Rursus legitimè sequitur: puncta A, B, C, sunt inter se diuersa, atque

in eadem recta linea poſita. & inſuper puncta C, B, D, ſunt inter ſe diuerſa, atque in eadem recta linea poſita: ergo puncta A,B,C, D ſunt poſita in eadem recta linea.

VIII. Duæ ſuperficies planæ, tantum concurrunt in vnica recta linea.

Hinc legitimè ſequitur, puncta X & Z ſunt in ſuperficie plana A B: & inſuper puncta X & Z ſunt in ſuperficie plana C D, diuerſa à ſuperficie A B: ergo puncta X & Z, ſunt in eadem recta linea.

IX. Linea recta, vel arcus circuli, cuius vnum extremum intra circulum cadit, alterum extremum cadit extra eumdem circulum: in vnico puncto ſecat circumferentiam illius circuli.

Fig. 4. Hinc ſuppoſito, quod punctum A, cadat intra circulum, cuius circumferentiæ pars ſit C D: & inſuper quod punctum B, cadat extra eumdem circulum: ac denique quod A B, ſit recta linea, vel arcus alicuius circuli: legitimè ſequitur: puncta X & Z ſunt in linea A B, & præterea puncta X & Z ſunt in arcu C D: ergo puncta X & Z non ſunt diuerſa.

X. Ex lineis rectis per circulum ductis, omnis, & ſola circuli diameter, in duas partes æquales diuidit, tum circulum, tum etiam circumferentiam circuli.

Fig. 5. Hinc legitimè ſequitur: arcus A B C, eſt dimidia circumferentia circuli, centro X deſcripti: ergo puncta A, X, C, ſunt in directum, atque in eadem diametro conſtituta. Rurſus legitimè ſequitur: arcus A B C centro X deſcriptus eſt, atque inſuper puncta A, X, C ſunt in directum: ergo arcus A B C eſt dimidia circuli circumferentia.

XI. Anguli rectilinei, inter ſe, habent proportionem, quam habent illorum angulorum menſuræ, æqualibus radijs deſcriptæ.

Fig. 6. Hinc ſuppoſito quod anguli rectilinei A B C, menſura A C, deſcripta ſit radio B A: quodque inſuper rectilinei anguli D E F, menſura D F, deſcripta ſit radio E D: ac denique quod radius B A, æquetur radio E D: legitimè ſequitur: ergo Angulus B A C *ad* D E F = arcui A C *ad* D F.

XII. Singula puncta lineæ rectæ, aut ſuperficiei planæ,

næ, quæ non decreſcit, & ſimplici motu tantum vehitur in altum: producunt lineas rectas, æquales, & parallelas inter ſe. Et viciſſim plures rectæ lineæ, quæ inter ſe ſunt æquales, & parallelæ: poſſunt produci à punctis eiuſdem rectæ lineæ, aut ſuperficiei planæ: quæ ſimplici motu, tantum vehatur in altum.

Hinc legitimè ſequitur: ſuperficiei planę, quę ſimplici motu, tantum vehitur, puncta A & B, deſcribunt lineas A D & B C: ergo lineæ A D & B C ſunt rectæ, atque inter ſe æquales, ac parallelæ. Rurſus legitimè ſequitur: lineæ rectæ A D & B C, ſunt inter ſe æquales, & parallelæ: ergo lineæ rectæ A D & B C, poſſunt produci à punctis A & B, ſuperficiei planæ, aut rectæ lineæ, quæ ſimplici motu, tantum vehatur. *Fig. 1.*

XIII. Lineæ parallelæ, conſtitutæ in ſuperficie plana quæ non decreſcit, & ſimplici motu, tantum vehitur in altum, vel tantum rotatur: producunt ſuperficies parallelas.

Hinc ſuppoſito quod lineæ A B & C D, ſint inter ſe parallelæ, atque inſuper conſtitutæ in eadem plana ſuperficie, quæ non decreſcit, & ſimplici motu, vehitur in altum, vel tantum rotatur: legitimè ſequitur: ergo ſuperficies productæ à lineis A B & C D, ſunt inter ſe parallelæ.

XIV. Linea recta, aut ſuperficies plana, quæ ſimplici motu tantum vehitur in altum: ſemper manet parallela ad primum ſuum veſtigium.

Hinc ſuppoſito quod linea recta, vel plana ſuperficies A B, ſimplici motu, tantum vecta in altum, perueniat vſque in C D: legitimè ſequitur: ergo A B eſt parallela ipſi C D. *Fig. 1.*

XV. Linea recta, aut plana ſuperficies, quæ ſimplici motu, tantum vehitur in altum: non mutat aperturam, ſiue angulum quem facit cum recta linea, per quam vehitur. Et viciſſim linea recta, aut plana ſuperficies, quæ ſimplici motu, mouetur per rectam lineam, & cum illa non mutat aperturam: ſimplici motu, tantum in altum vehitur per illam rectam lineam.

Hinc

Hinc legitimè ſequitur: linea recta, aut plana ſuperficies A B, ſimplici motu, tantum vecta in altum, per rectam lineam X Z, peruenit in D C: ergo angulus A B Z = angulo D C Z. Rurſus legitimè ſequitur: lineæ rectæ X Z, inſiſtunt duæ rectæ lineæ, aut duæ planæ ſuperficies A B & D C, ita vt angulus A B Z = angulo D C Z: ergo A B poteſt peruenire in D C, vt ſimplici motu, tantum in altum vehatur, per lineam X Z.

Fig. 7.

XVI. Quando ſuperficies plana, ſimplici motu, tantum vehitur in altum: tunc illius planæ ſuperficiei, aut partes æquales, aut lineæ æquales, producunt ſolida æqualia, aut ſuperficies æquales, inter ſe.

Hinc ſuppoſito quod A & B, vel ſint lineæ inter ſe æquales, vel ſint ſuperficies inter ſe æquales: ac præterea quod A & B ſint in eadem plana ſuperficie, quæ ſimplici motu tantum vehitur in altum: legitimè ſequetur: ergo à lineis A & B productæ ſuperficies, inter ſe æquantur. Item à ſuperficiebus A & B producta ſolida, ſunt inter ſe æqualia.

XVII. Duæ proportiones habentes idem conſequens, habent eam proportionem, quam habent antecedentes termini.

Hinc legitimè ſequitur: rationes A *ad* C, & B *ad* C, habent commune conſequens C: ergo A *ad* C reſpectu B *ad* C = A *ad* B.

POSTVLATA.

I. DAta quæuis quantitas continua, dato quouis tempore, vniformi velocitate moueri poteſt, ſic vt ſimplici motu, tantum vehatur, aut tantum rotetur.

Hinc ſequitur impoſſibilem non eſſe, ſiue produci poſſe, quamuis rectam lineam, aut planam ſuperficiem, aut aliam quamuis continuam quantitatem, genitam ex nominato aliquo ductu Geometrico in quo baſis non decreſcit. Item à quouis puncto, ad quoduis aliud punctum rectam lineam extendi poſſe. Item quouis centro, ac radio circulum deſcribi poſſe, &c.

II. Baſes ſimiles inter ſe, atque inſeruientes nominatis

natis

natis ductibus Geometricis: duci possunt, vt producant quantitates continuas, similes inter se.

Hinc legitime sequitur, basis A, est similis basi B: atque insuper ex basi A, aliquo ductu Geometrico nominato producitur quantitas X: ergo ex basi B, aliquo ductu Geometrico nominato, potest produci quantitas Z, similis quantitati X. Item supra datam quamuis rectam describi posse, triangulum, aut parallelogrammum, simile illi, quod supra alteram rectam lineam descriptum est, &c.

AXIOMATA NON RIGOROSA,
siue principia hypothetica.

I. Circumferentia circuli X, ad circumferentiam circuli Z, habet eamdem proportionem, quam habet radius circuli X, ad radium circuli Z.

II. A *in* C ductu 1 *ad* A *in* C ductu 2 = 1 *ad* 1.

III. A *in* C ductu 1 *ad* A *in* C ductu 3 = A *in* C *ad* A *in* C *per* 1 + E.

Notam litteram E significare tot vnitates, quot extensiones decrescunt in basi A, quæ ducitur ductu tertio.

IV. A *in* C ductu 1 *ad* A *in* C ductu 4 = 2 *ad* 1.

V. A *in* C ductu 1 *ad* A *in* C ductu 5 = A *ad* F.

Nota litteram F, significare sinum arcus A, supposito quod basis A, sit arcus. Verum supposito quod basis A sit superficies, tunc littera F, significat duas tertias partes superficiei quadratæ, cuius vnum latus, sit radius baseos A.

VI. A *in* C quouis ductu *ad* A *in* C ductu eiusdem classis = A *in* C *ad* A *in* C.

Antequam pergam ad subsequentes partes nostræ Logisticæ, in quibus diuersæ propositiones inferuntur, ex principijs propositis in hac secunda parte: breuiter noto aliqua, spectantia ad axiomata nostra non rigorosa, postremo loco proposita: de quibus, aliquis (in rebus Mathematicis non magnopere versatus) in hunc modum posset statuere. Axiomata non rigorosa, sunt propositiones nullatenus cognitæ solo lumine naturæ; atque adeo sunt propositiones, quæ apud Mathe-

Mathematicos non merentur aſſenſum, niſi legitimè probentur: & tamen hic non probantur, ſed ſine vlla probatione aſſumuntur, quare non eſſet male fundata opinio, exiſtimantium, huiuſmodi non rigoroſa axiomata aſſumendo, recidi à laudabili conſuetudine Mathematicorum: qui ſua non deducunt niſi ex principijs ſolo lumine naturæ cognitis; vel certe legitimas non eſſe illas demonſtrationes, quæ in ſequentibus partibus huius Ideæ afferuntur, quippe quæ deductæ non ſunt ex ſolis principijs per ſe notis, ſed aliqua ex parte innituntur hypotheticis principijs,ſiue propoſitionibus deſtitutis ea probatione qua indigent, vt apud Mathematicos mereantur aſſenſum. Vt his,vel ſimilibus querelis viam occludam, aut oportunum remedium afferam: breuiter propono reſponſiones aliquas, conuenientes obiectionibus hic inſinuatis: & ſpero, quod inter diuerſas reſponſiones quas affero, facile quiuis inueniet aliquam ſibi conuenientem.

Reſpondeo primo. Vel pro ſtricta Matheſi non male adhibentur demonſtrationes hypotheticę,quæque rigoroſę non ſunt:vel huiuſmodi demonſtrationes malè adhibentur. Si primum, quandoquidem demonſtrationes hypotheticæ, requirant principia hypothetica, ſiue axiomata non rigoroſa: non malè aſſumimus axiomata non rigoroſa, vt inferamus hypotheticas demonſtrationes, pro ſtricta Matheſi vtiles. Si ſecundum, non habeo quod reſpondeam, niſi vt paulo attentius legas reflexionem 4. capitis 4. prioris partis huius Ideæ: nec non caput 12. huius ſecundæ partis: denique ſubſequentem quartam partem Ideæ noſtræ Logiſticæ.

Reſpondeo ſecundo. Si plurima Algebræ fundamenta, neque per ſe nota, neque vllis demonſtrationibus rigoroſis ſtabilita: ſi indiuiſibilium Geometria, aliquibus falſis principijs innixa: atque alia huiuſmodi, ingenioſiſsimorum Mathematicorum præclara inuenta: meritò laudantur, licet ſupponant, atque aſſumant aliqua, quæ neque lumine naturæ nota ſint, neque rigoroſè demonſtrata; quo iure mihi vertetur vitio, quod aliquas veritates aſſumam, prætermiſſa demonſtratione?

Reſpondeo tertio. Hoc loco exponi Ideam noſtræ Logiſticæ: atque Methodum quam Logiſtica tenet in ſuis diſcurſibus, &c. quare (ijs exceptis qui ſolis apprehenſionibus reguntur) nemo non videt, ad propoſitum finem, ſuperfluum eſſe ſingula rigoroſis diſcurſibus ſtabilire.

Reſpondeo quarto. Capite 8. libri 1. Logiſticæ, propoſuimus diuerſa Theoremata, neglectis tamen demonſtrationibus: hæc Theoremata, poſtea demonſtrata exhibuimus, in ſecunda parte epiſtolæ additæ prioribus libris Logiſticæ; hæc eadem Theoremata alia Methodo ſtabili-

ſtabilita inuenies in quarta parte huius Ideæ. Præterea in tertia parte prædictæ epiſtolæ, neglectis iterum demonſtrationibus, propoſuimus aliquas aſſertiones, de angulis, ſinibus, ſubtenſis, &c. has aſſertiones ſiue hæc Theoremata, rigoroſis (niſi fallor) demonſtrationibus ſtabilita inuenies in tertia parte huius Ideæ. Similiter, ſuo loco afferam demonſtrationes illarum propoſitionum, quæ hic demonſtrationibus deſtitutæ, appellantur axiomata non rigoroſa; demonſtrationes, varijs ex cauſis iudicaui prætermittendas: inter quas cauſas, ex poſtremis vna eſt, quod melius ſapient prædictarum propoſitionum demonſtrationes, poſtquam innotuerit propoſitionum vſus, atque vtilitas; & ſi forte hic vſus aut vtilitas magni momenti non ſit, parui momenti propoſitiones neglectim proponere, non eſt citra meritum illas tractare.

Reſpondeo quinto. Vel prædictæ hypotheſes veræ ſunt: vel certè ſunt falſæ. Si primum, non aberro, dum propoſitiones veras, atque demonſtratione deſtitutas, aſſumo tanquam veras, atque hypotheticas. Si ſecundum: hanc amice lector abs te gratiam peto, vt dictas propoſitiones falſas demonſtres; etenim non magis ſpectat ad Mathematicum oſtendere atque demonſtrare, quæ propoſitiones veræ ſint, quam quæ aberrent à veritate. Si tibi integrum eſt, hanc gratiam mihi negando, genio tuo ſatisfacere: cur mihi licitum non erit genio meo aliquid indulgere?

Notandum.

QVod inter rigoroſa axiomata hoc capite propoſita, nulla inueniantur, in quibus agatur de proportione maioris aut minoris inæqualitatis: cauſa eſt, quia pro quarta parte huius Ideæ reſeruantur, quæ ſpectant ad proportiones, diuerſas, à proportione æqualitatis.



IDEÆ LOGISTICÆ PARS TERTIA.

ARGVMENTVM.

Proponuntur nonnulla Theoremata, in quibus aliquid asseritur de angulis rectilineis: aut de lineis parallelis: aut de triangulis similibus: aut de angulorum sinibus vel subtensis. In hac parte nolui genio meo indulgere, sed proximè sequor viam ab antiquioribus Geometris vsitatam, vt sic appareat, etiam in hac via prodesse, qua in nostra Logistica afferuntur, diuersa, à via Logistica nostra propria. Theoremata qua hic proponuntur, & (nisi fallor) rigorosè demonstrantur: continent pracipuas veritates, quibus in Geometricis contemplationibus, tanquam fundamentis indiget nostra Logistica, vt statuat veritates dependentes ab angulis.

Theorema I.



X puncto A ductæ sint rectæ lineæ A B, A C, A D, quæ omnes sint in eodem plano, & rectæ lineæ A C & A D sint ad eamdem partem rectæ A B.

Dico primo, Angulum C A B = D A B: si puncta A, D, C sint in directum.

Fig. 8. Dico secundo, Puncta A, D, C esse in directum: si angulus C A B = D A B.

Constructio. Mensura anguli C A B sit arcus B F, atque eodem radio descriptus arcus B R, sit mensura anguli D A B.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim puncta A, D, C, sunt in directum, atque ad eamdem partem rectæ A B: ergo per axiom. 9. Puncta F & R non sunt diuersa: ergo arcus F B = arcui R B: ergo mensura anguli C A B = mensuræ anguli DAB: ergo per axioma 11. Angulus C A B = D A B. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim angulus C A B = D A B: ergo mensura anguli C A B = mensuræ anguli D A B: ergo arcus

arcus F B = arcui R B: ſed etiam per hypotheſim rectæ lineæ A B, A C, A D ſunt in eodem plano, & rectæ A C & A D ſunt ad eamdem partem rectæ A B: ergo puncta F & R non ſunt diuerſa: atqui puncta A, F, C, ſunt in directum: ergo puncta A, R, C, ſunt in directum: ſed etiam puncta A, R, D ſunt in directum: ergo per axioma 7. Puncta A, D, C, ſunt in directum. Quod erat ſecundum.

Theorema II.

EX puncto C, ductæ ſint tres rectæ lineæ C A, C D, C B, quæ omnes ſint in eodem plano, & rectæ C A, & C B ſint ad diuerſas partes rectæ C D. *Fig. 9.*

Dico primo. Angulum A C D † D C B = duobus rectis angulis, ſi puncta A, C, B ſint in directum.

Dico ſecundo. Puncta A, C, B, eſſe in directum, ſi angulus A C D † D C B = duobus rectis angulis.

Conſtructio. Radio C B, centro C, deſcriptus ſit arcus, occurrens rectæ C A in puncto X: & rectæ C D in puncto Z.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim puncta X, C, B ſunt in directum: ergo per axioma 10. Arcus X Z † Z B = dimidiæ circumferentiæ circuli: ergo arcus X Z † Z B = menſuræ duorum rectorum angulorum: ſed etiam arcus X Z † Z B = menſuræ anguli A C D † D C B: ergo menſuræ angulorum A C D † D C B = menſuræ duorum rectorum angulorum: ergo per axioma 11. Angulus ACD † D C B = duobus rectis angulis. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim angulus X C Z † Z C B = duobus rectis angulis: ergo arcus X Z † Z B = dimidiæ circumferentiæ circuli: ergo arcus X Z B eſt dimidia circumferentia circuli: ſed etiam per conſtructionem, arcus X Z B centrum eſt C: ergo per axioma 10. Puncta X, C, B ſunt in directum ſed etiam per hypotheſim puncta A X C ſunt in directum: ergo per axioma 7. Puncta A X C B ſunt in directum. Quod erat ſecundum.

Theorema III.

DVæ rectæ lineæ A B & D E ſeſe interſecent in puncto C.

Dico angulum A C E = D C B; ſiue angulos ad verticem oppoſitos inter ſe æquales eſſe. *Fig. 10.*

Demonſtratio. Per Theor. 2. Angulus A C E † A C D = duobus

 rectis

rectis angulis: ſed etiam per Theor. 2. angulus A C D † D C B = duobus rectis angulis: ergo angulus A C E † A C D = A C D † D C B: ergo ablato vtrinque angulo A C D, etiam angulus A C E = D C B. Quod aſſerebatur.

Theorema IV.

Fig. 11. Tres rectæ lineæ A B, C D, E F ſint in eodem plano: & recta E F, ſecet rectas A B & C D in punctis G & H.

Dico primo, ſuppoſito quod lineæ A B & C D ſint parallelæ, neceſſario ſequitur: primo, angulum internum æquari angulo externo ad eamdem partem poſito: hoc eſt angulum B G E = D H E. Secundo, angulos alternos inter ſe æquales eſſe: hoc eſt angulum B G H = C H G. Tertio, duos angulos internos ad eamdem partem poſitos, ſimul æquari duobus rectis angulis: hoc eſt B G H † D H G = duobus rectis angulis.

Dico ſecundo, legitimè ſequi rectas A B & C D eſſe parallelas: primo, ex eo quod angulus internus B G E æquetur externo D H E, poſito ad eamdem partem. Secundo, ex eo quod duo anguli alterni B G H & C H G, ſint inter ſe æquales. Tertio, ex eo quod duo interni anguli B G H & D H G, poſiti ad eamdem partem, atque ſimul ſumpti, æquentur duobus rectis angulis.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim rectæ lineæ A B & C D, ſunt inter ſe parallelæ, atque poſitæ in eodem plano: ergo recta G B ſimplici motu tantum vecta per rectam G H poteſt peruenire vſque in H D: ergo per axioma 15. Angulus B G E = D H E. Vt in prima propoſitionis parte, primo loco aſſeritur. Quoniam vero angulus B G E = D H E: & inſuper per Theor. 3. Angulus D H E = C H G: per axioma 6. Etiam angulus B G E = C H G: ergo angulus B G H = C H G. Quod ſecundo loco aſſeritur. Rurſus quoniam angulus B G H = D H E: etiam angulus B G H † D H G = D H E † D H G: ſed per Theor. 2. Angulus D H E † D H G = duobus rectis angulis: ergo angulus B G H † D H G = duobus rectis angulis. Quod tertio loco aſſertum fuit.

Demonſtratur ſecunda pars. Suppoſito quod angulus B G H = D H E per axioma 15. Recta B G poteſt peruenire vſque in D H, ſic vt ſimplici motu tantum vehatur, per rectam G E: ergo per axioma 14. Lineæ B G & D H ſunt inter ſe parallelæ: ergo etiam lineæ A B & C D ſunt inter ſe parallelæ, quod erat primum. Rurſus, ſuppoſito quod angulus B G H = C H G: quoniam per Theor. 3. Angulus

C H G

CHG = DHE: etiam angulus BGH = DHE: igitur vt iam ostensum est lineæ, AB & CD, sunt inter se parallelæ. Quod secundo loco asserebatur. Denique supposito quod angulus BGH † DHG = duobus rectis angulis, quoniam per Theor. 2. Etiam angulus DHE † DHG = duobus rectis angulis: per axioma 6. Patet angulum BGH † DHG = DHE † DHG: ergo ablato vtrinque angulo DHG, etiam angulus BGH = DHE: ergo vt hic primo loco ostensum est, lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ. Quod erat tertium.

Theorema V.

Sint duo triangula rectilinea ABC, & DEF.

Dico triangulum ABC esse simile triangulo DEF. *Fig.* 12.

Primo. Si Angulus A = D, & insuper angulus C = F.

Secundo. Si Angulus A = D, & insuper recta AB *ad* DE = AC *ad* DF.

Tertio. Si recta AB *ad* DE = AC *ad* DF = BC *ad* EF.

Constructio. Supra rectam DF, intelligatur factum triangulum DXF, simile triangulo ABC; quod per postulatum 2. Est possibile.

Demonstratur prima pars. Per constructionem triangulum ABC, est simile triangulo DXF: ergo angulus A = FDX: sed per hypothesim, etiam angulus A = FDE: ergo per axioma 6. Angulus FDX = FDE: ergo per Theor. 1. Puncta D, E, X sunt in directum. Simili planè discursu, patet angulum DFE = DFX, atque adeo puncta F, E, X, esse in directum: ergo per axioma 7. Punctum X, non est diuersum à puncto E: ergo triangulum DXF, non est diuersum à triangulo DEF: sed per constructionem triangulum DXF, est simile triangulo ABC: ergo etiam triangulum DEF, est simile triangulo ABC. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per constructionem triangulum ABC, est simile triangulo DXF: ergo angulus A = FDX: sed per hypothesim angulus A = FDE: ergo angulus FDX = FDE: ergo per Theor. 1. Puncta D, X, E, sunt in directum; præterea, quoniam per constructionem triangulum ABC, est simile triangulo DXF, etiam recta AC *ad* DF = AB *ad* DX: sed per hypothesim, etiam recta AC *ad* DF = AB *ad* DE: ergo per axioma 6. Recta AB *ad* DX = AB *ad* DE: ergo (*per a*) DX = DE: atqui, vt iam ostensum est, etiam puncta D, X, E sunt in directum: ergo punctum X non est diuersum à puncto E: ergo triangulum DXF, non est diuersum à triangulo DEF:

sed

ſed per conſtructionem triangulum D X F, eſt ſimile triangulo A B C: ergo etiam triangulum D E F,eſt ſimile triangulo A B C. Quod erat ſecundum.

Demonſtratur tertia pars. Per conſtructionem triangulum A B C, eſt ſimile triangulo D X F: ergo recta A C *ad* D F = A B *ad* D X: ſed per hypotheſim, etiam recta A C *ad* D F = A B *ad* D E: ergo per axioma 6. Recta A B *ad* D X = A B *ad* D E: ergo (*per a*) D X = D E: ergo puncta X & E ſunt in eodem arcu, radio D E, & centro D deſcripto. Simili planè argumento patet F E = F X,atque adeo puncta F & X eſſe in eodem arcu, radio F E, & centro F deſcripto: ergo per axioma 9. Puncta F & X non ſunt diuerſa: ergo triangulum D X F, non eſt diuerſum à triangulo D E F: ſed per conſtructionem triangulum D X F, eſt ſimile triangulo A B C: ergo etiam triangulum D E F eſt ſimile triangulo A B C. Quod erat tertium.

a, eſt axioma 7 cap.8.lib.1. Logiſticæ: vel Theor.1. partis 4. huius Ideæ.

Corollarium.

Fig.12. Hinc ſuppoſito quod recta B R, ſecet rectam A C *in* R. Quodque recta A B = C B: patet rectam A R = R C ſi angulus A R B = C R B: & viciſſim angulum A R B = C R B ſi recta A R = R C.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim A B = C B: ergo linea A B *ad* C B = R B *ad* R B: ſed etiam per hypotheſim angulus A R B = C R B: ergo per Theor. 5. Triangulum A B R eſt ſimile triangulo C R B: ergo linea AB *ad* C B = AR *ad* C R: ſed per hypotheſim A B = C B: ergo linea A R = R C. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim linea A B = C B: item linea A R = R C: denique linea B R = RB: ergo linea AB *ad* C B = A R *ad* R C ♎ R B *ad* R B: ergo per Theor. 5. Triangulum A B R eſt ſimile triangulo C B R: ergo angulus A R B = C R B. Quod erat ſecundum.

Theorema VI.

Fig.13. Centro F deſcriptus arcus A B, diuiſus ſit in puncto X,vt arcus A X = X B: & ductæ ſint rectæ A C & B C, concurrentes in C.

Dico primo. Arcum A X, hoc eſt dimidium arcus A B, eſſe menſuram anguli A C B,ſi arcus A X B productus tranſeat per punctum C.

Dico ſecundo. Arcum A X B productum tranſire per punctum C, ſi arcus A X eſt æqualis menſuræ anguli A C B.

Pro

Pro demonstratione primæ partis, triplicem casum considero, atque ex primo casu infero secundum, & tertium: deinde ex prima parte secundam deduco. Primæ partis casus primus sit, quando centrum F est in recta A C. Secundus casus sit, quando centrum F cadit intra spatium A B C. Tertius casus sit, quando centrum F cadit extra spatium A B C.

Constructio pro primo casu. Ducta sit recta A B, quam recta F X secet in puncto D.

Demonstratur primæ partis casus primus. Quoniam per hypothesim arcus A X = X B: etiam angulus A F X = B F X: sed etiam recta A F = B F, & præterea F D est communis. Ergo per Theor. 5. Triangula AFD, & B F D, sunt similia inter se: ergo recta AF *ad* FB = A D *ad* D B: sed A F = F B: ergo A D = D B: ergo recta A D *ad* A B = A F *ad* A C: sed etiam angulus C A B est communis; ergo per Theor. 5. Triangula A F D & A C B sunt inter se similia: ergo angulus A F D = A C B: sed mensura anguli A F D est arcus A X: ergo mensura anguli A C B = arcui A X. Quod erat primum.

Constructio pro secundo, & tertio casu. Per puncta C & F ducta sit recta linea, secans circuli circumferentiam in puncto E. *Fig*. 14.

Demonstratur primæ partis, casus secundus. In secundo casu, centrum F, cadit intra rectas A C & C B: ergo punctum E cadit intra puncta A&B: sed per primum casum, dimidium arcus A E = mensuræ anguli A C E; item dimidium arcus E B = mensuræ anguli E C B: ergo A E † E B *per* 2 = mensuræ anguli A C E † E C B: sed A E † E B *per* 2 = A B *per* 2: item mensura anguli A C E † E C B = mensuræ anguli A C B: ergo A B *per* 2 = mensuræ anguli A C B: ergo dimidium arcus A B = mensuræ anguli A C B. Quod in secundo casu erat probandum.

Demonstratur primæ partis, casus tertius. In tertio casu, centrum F, cadit extra lineas A C & C B: ergo punctum E, cadit extra arcum A B, eritque punctum A, in arcu E B: iam vero per primum casum, E B *per* 2 = mensuræ anguli E C B: item A E *per* 2 = mensuræ anguli E C A: ergo E B — E A *per* 2 = mensuræ anguli E C B — angulo E C A: atqui E B — E A *per* 2 = A B *per* 2: item mensura anguli E C B — E C A = mensuræ anguli A C B: ergo A B *per* 2 = mensuræ anguli A C B: ergo dimidium arcus A B = mensuræ anguli A C B. Quod in tertio casu probandum erat. *Fig*. 15.

Constructio pro secunda parte. Punctum in quo arcus A X B, productus, occurrit rectæ A C, etiam productæ si opus fuerit, vocetur Z.

Demonstratur secunda pars. Per primam partem arcus A X est mensura anguli A Z B: sed etiam per hypothesim, arcus A X, est mensura

ſura anguli A C B : ergo angulus A Z B = A C B : atqui etiam angulus CAB eſt communis : ergo per Theor. 5. Triangulum A Z B, eſt ſimile triangulo A C B : ergo recta A B *ad* A C = A B *ad* A Z : ergo A C = A Z : ergo punctum C, non eſt diuerſum à puncto Z : atqui per conſtructionem arcus A X B, productus, tranſit per punctum Z : ergo etiam arcus A X B, productus, tranſit per punctum C.

Theorema VII.

Fig.16. SIt quoduis triangulum A B C, & recta C D ſit perpendicularis ad A B. Præterea ductæ ſint rectæ F C & F B, vt anguli B C F, C B F inter ſe, atque eidem tertio D C A ſint æquales ; & puncta F & D ſint ad eamdem partem rectæ B C.

Dico arcum, radio F C, & centro F, deſcriptum : tranſire per puncta A, B, C.

Conſtructio. Ducta ſit recta F E perpendicularis ad C B.

Demonſtratio. Per hypotheſim, Angulus C B F = B C F : item anguli B E F & C E F ſunt recti : ergo per Theor. 5. Triangulum C F E, eſt ſimile triangulo B F E : ergo recta F E *ad* F E = F B *ad* FC : ergo F B = F C : ergo arcus radio F C, & centro F deſcriptus, tranſit per punctum B. Rurſus quoniam per hypotheſim & conſtructionem angulus E C F = D C A : atque inſuper angulus C E F = C D A : per Theor. 5. Triangulum C F E, eſt ſimile triangulo C A D : ergo angulus C F E = C A D : ſed etiam angulus C F E = B F E, cum prius oſtenſum ſit triangula C F E & B F E eſſe inter ſe ſimilia : ergo angulus C F B eſt duplus anguli C A D : ergo per Theor. 6. Arcus C B, deſcriptus radio F C, & centro F, tranſit per punctum A. Patet igitur arcum, radio F C, & centro F, deſcriptum, tranſire per puncta A, B, C. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

EX hac propoſitione patet, per data quæuis tria puncta A, B, C, deſcribi poſſe lineam circularem. Etenim ſi prius ducantur rectæ lineæ A B, A C, B C : deinde ponatur recta C D perpendicularis ad rectam A B : tertio fiant anguli B C F & C B F, qui ſinguli ſint æquales angulo D C A : tunc arcus radio F C, & centro F deſcriptus, tranſibit per puncta A, B, C, vt in propoſitione aſſeritur.

Theore-

Theorema VIII.

Sint duo anguli C A B & F D E, ita tamen vt vnus non sit maior,& alter minor recto angulo: præterea pro radio anguli C A B assumendo quamuis rectam A B, anguli C A B sinus rectus sit C B, item sinus complementi sit A C. Similiter pro radio anguli F D E assumendo quamlibet rectam D E, anguli F D E sinus rectus sit F E, sinus complementi sit D F. Fig. 17.

Dico primo. Quod radius A B ad radium D E = sinui recto C B ad sinum rectum F E: item sinui complementi A C ad sinum complementi D F; supposito quod angulus C A B = F D E: vel quod angulus A B C = D E F.

Dico secundo quod angulus C A B = F D E: item quod angulus A B C = D E F: supposito quod radius A B ad radium D E = sinui recto B C ad sinum rectum E F: vel sinui complementi A C ad sinum complementi D F.

Demonstratur prima pars. Quandoquidem per hypothesim anguli B A C sinus rectus sit B C, & sinus complementi sit A C: patet angulum A C B rectum esse: & similiter constat etiam angulum D F E rectum esse: ergo angulus A C B = D F E: sed per hypothesim etiam angulus C A B = F D E, vel certe angulus A B C = D E F: ergo per Theor. 5. Triangulum A B C,est simile triangulo D E F: ergo A B *ad* D E = B C *ad* E F = A C *ad* D F. Vt in prima parte asseritur.

Secunda pars, amplectitur duos casus. Primus casus est, quando recta A B *ad* D E = B C *ad* E F. Secundus casus est, quando recta A B *ad* D E = A C *ad* D F. Vtrumque casum seorsim demonstro, sed planè simili argumento, atque supposita eadem constructione.

Constructio pro vtroque casu secundæ partis. Supra rectam D E, factum sit triangulum D X E simile triangulo A C B; sic vt puncta X & F sint ad eamdem partem rectæ D E. Præterea per puncta E,F,D, descriptus sit arcus circuli.

Demonstratur prior casus secundæ partis. Per constructionem triangulum A C B, est simile triangulo D X E: ergo angulus A C B = D X E: atqui angulus A C B = D F E, quia vterque per hypothesim rectus est: ergo angulus D X E = D F E: ergo per Theor. 6. punctum X est in arcu E F D. Præterea quia per constructionem triangulum A C B est simile triangulo D X E, recta A B *ad* D E = B C *ad* E X: sed per hypothesim etiam recta A B *ad* D E = B C *ad* E F: ergo recta B C *ad* E X = B C *ad* E F: ergo (*per a*) recta E F = E X:

ergo puncta F & X sunt in eodem arcu, radio E F, & centro E, descripto: atqui etiam ostensum est puncta F & X esse in eodem arcu E F D, atque ad eamdem partem rectæ D E: ergo per axioma 9. puncta F & X non sunt diuersa: ergo triangulum D X E, non est diuersum à triangulo D F E: sed per constructionem triangulum D X E, est simile triangulo A C B: ergo etiam triangulum D F E, est simile triangulo A C B: ergo angulus B A C = E D F, quod erat probandum in primo casu.

Demonstratur posterior casus secundæ partis. Per constructionem, triangulum A C B, est simile triangulo D X E: ergo angulus A C B = D X E: atqui angulus A C B = D F E, quia vterque per hypothesim rectus est: ergo angulus D X E = D F E; ergo per Theor. 6. punctum X, est in arcu E F D. Præterea quia per constructionem triangulum A C B, est simile triangulo D X E, recta A B *ad* D E = A C *ad* D X: sed per hypothesim etiam recta A B *ad* D E = A C *ad* D F: ergo recta A C *ad* D X = A C *ad* D F: ergo (*per a*) recta D X = D F: ergo puncta F & X, sunt in eodem arcu, radio D F, & centro D, descripto: atqui etiam ostensum est puncta F & X esse in eodem arcu E F D: ergo per axioma 9. puncta F & X non sunt diuersa: ergo triangulũ D X E, non est diuersum à triangulo D F E: sed per constructionem triangulum D X E, est simile triangulo A C B: ergo triangulum D F E est simile triangulo A C B: ego angulus B A C = E D F, quod in secundo casu erat demonstrandum.

a, est axioma 7. cap. 8. lib. 1. Logisticæ; vel Theor. 1. partis 4. huius Ideæ.

Theorema IX.

Fig. 18. vel 19. Sint duo anguli B A G & E D H, insistentes arcubus B G & E H, quorum arcuum subtensæ sint rectæ lineæ B G & E H: & singuli arcus, vel habeant centrum in vertice anguli ipsis insistentis: vel certe producti transeant per verticem illius anguli.

Dico primo radium arcus B G ad radium arcus E H = subtensæ B G ad subtensam E H: si angulus B A G = E D H.

Dico secundo Angulum B A G = E D H: si radius arcus B G ad radium arcus E H = subtensæ B G ad subtensam E H.

Duplex est casus, primus quando centrum arcus B G est in puncto A, & centrum arcus E H est in puncto D. Secundus, quando arcus B G productus transit per punctum A, & centrum habet in alio puncto X: & similiter arcus E H productus transit per punctum D, sic vt centrum habeat in alio puncto Z.

De-

Demonstratur prima pars, in primo casu. Per hypothesim A B = A G, & etiam D E = D H: ergo A B *ad* D E = A G *ad* D H: sed etiam per hypothesim angulus B A G = E D H: ergo per Theor. 5 Triangulum A B G est simile triangulo D E H: ergo A B *ad* B G = D E *ad* E H. *Fig.* 18.

Demonstratur secunda pars, in primo casu. Per hypothesim A B = A G & etiam D E = D H: ergo A B *ad* D E = AG *ad* D H: sed etiam per hypothesim A B *ad* D E = B G *ad* E H: ergo per Theor. 5. Triangulum A B G, est simile triangulo D E H: ergo angulus B A G = E D H.

Constructio pro secundo casu. Ductæ sint rectæ X B, X G, Z E, Z G. *Fig.* 19.

Demonstratur prima pars, in secundo casu. Per hypothesim angulus BAG = E D H; sed per Theor. 6. Angulus B X G est duplus anguli B A G: item angulus E Z H est duplus anguli E D H: ergo angulus B X G = E Z H: sed per hypothesim, etiam X B *ad* Z E = X G *ad* Z H: ergo per Theor. 5. Triangulum X B G, est simile triangulo Z E H: ergo X B *ad* Z E = B G *ad* E H: atqui X B est radius arcus B G, & etiam Z E est radius arcus E H: ergo radius arcus B G ad radium arcus E H = subtensæ B G ad subtensam E H.

Demonstratur secunda pars, in secundo casu. Per hypothesim, X B, est radius arcus B G: item Z E, est radius arcus E H: ergo per hypothesim X B *ad* Z E = B G *ad* E H: sed per hypothesim, etiam X B *ad* Z E = X G *ad* Z H: ergo per Theor. 5. Triangulum X B G, est simile triangulo Z E H: ergo angulus B X G = E Z H: atqui per Theor. 6. Angulus B X G est duplus anguli B A G: item angulus E Z H est duplus anguli E D H: ergo angulus BAG = E D H. Quod erat probandum.

Theorema X.

IN triangulo A B C, angulus A B C sit rectus: & insuper ducta sit recta B D, vt angulus B D A sit rectus. *Fig.* 20.

Dico primo, triangula A B C, A D B & B D C esse inter se similia.

Dico secundo, rectam A D *ad* D B = D B *ad* D C.

Dico tertio, rectam A C *ad* B C = B C *ad* D C.

Dico quarto, rectam A C *ad* A B = A B *ad* A D.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim angulus A B C = A D B, & insuper angulus A est communis: ergo per Theor 5. Triangulum A B C est simile triangulo A D B. Eodem planè modo patet triangulum A B C esse simile triangulo B D C: quandoquidem per hypothesim iterum angulus A B C = angulo B D C, & insuper angu-

 lus

lus C sit communis: patet igitur triangula **A B C, A D B, & B D C** esse inter se similia. Quod in prima parte asseritur.

Demonstratur secunda pars. Per primam partem triangulum **A D B**, est simile triangulo B D C: ergo recta A **D** *ad* **D B = D B** *ad* **D C.** Quod erat secundum.

Demonstratur tertia pars. Per primam partem triangulum **A B C** est simile triangulo B D C: ergo rectam **A C** *ad* **B C = B C** *ad* **D C.** Quod erat tertium.

Demonstratur quarta pars: Per primam partem triangulum A B C est simile triangulo A D B: ergo recta A C *ad* A B = A B *ad* A D. Quod erat quartum.

Theorema XI.

Fig. 21. *vel* 22. **Sint duæ rectæ lineæ A B, & C D, quæ se intersecent in puncto E.** Dico primo. Rectam A E *ad* E B = D E *ad* E C: si rectæ A D & C B sint inter se parallelæ. Et vicissim rectas lineas A D & C B esse parallelas: si recta A E *ad* E B = D E *ad* E C.

Dico secundo. Rectam A E *ad* E C = E D *ad* E B: si puncta A, B, C, D, sint ad eamdem circularem lineam. Et vicissim puncta A, B, C, D, esse ad eamdẽ circularem lineam: si recta A E *ad* E C = E D *ad* E B.

Constructio pro prima parte. Ductæ sint rectæ lineæ C, B & A D.

Fig. 21. Demonstratur prima pars, primæ assertionis. Per hypothesim rectæ lineæ C B & A D sunt inter se parallelæ: ergo per Theor. 4. Angulus B A D = A B C, item angulus C D A = D C B: ergo per Theor. 5. Triangulum A E D est simile triangulo B E C: ergo recta A E *ad* E B = D E *ad* E C: Quod asseritur primo loco.

Demonstratur secunda pars, primæ assertionis. Per hypothesim recta A E *ad* E B = D E *ad* E C: sed etiam per Theor. 3. Angulus A E D = B E C: ergo per Theor. 5. Triangulum A E D est simile triangulo B E C: ergo angulus B A D = A B C: ergo per Theor. 4. Lineæ rectæ C B & A D sunt inter se parallelæ. Quod asseritur secundo loco.

Fig. 22. Constructio pro secunda assertione. Descripta sit linea circularis transiens per puncta B, D, A.

Demonstratur prima pars, secundæ assertionis. Per hypothesim arcus B D productus transit per puncta A & C: ergo per Theor. 6. Angulus D A B = D C B: atqui eodem modo patet angulum A D C = A B C: ergo per Theor. 5. Triangulum A E D est simile triangulo C E B: ergo recta A E *ad* E C = D E *ad* E B. Vt primo loco asserebatur.

Demonstratur secunda pars, secundæ assertionis. Per hypothesim recta A E *ad* E C = D E *ad* E B: atqui per Theor. 3. Etiam angulus

A E

A E D = C E B : ergo per Theor. 5. Triangulum A E D est simile triangulo C E B : ergo angulus D A B = D C B : ergo per Theor. 6. Arcus B D, qui per constructionem transit per punctum A, etiam productus transit per punctum C : ergo puncta A, B, C, D, sunt ad eumdem arcum siue lineam circularem.

Theorema XII.

Sit quoduis triangulum rectilineum A B C, in quo ducta sit recta B D, occurrens rectæ A C in puncto D. *Fig. 23.*

Dico primo, rectam A B *ad* B C = A D *ad* D C : si angulus A B D = D B C.

Dico secundo, Angulum A B D = D B C : si recta A B *ad* B C = A D *ad* D C.

Constructio. Anguli A B D radius sit A B, sinus A Z. Item anguli D B C, radius sit C B, sinus C X.

Demonstratur prima pars. Per constructionem angulus A Z B = C X Z, quandoquidem vterque rectus sit: sed per Theor. 3. Etiam angulus A D Z = C D X : ergo per Theor. 5. Triangulum D A Z est simile triangulo D C X : ergo recta A Z *ad* C X = A D *ad* D C : sed quoniam per hypothesim angulus A B D = C B D, per Theor. 8. Radius A B ad radium C B = sinui A Z ad sinum C X : ergo per axioma 6. Recta A D *ad* D C = A B *ad* B C. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Rursus vt in prima parte patet rectam A Z *ad* C X = A D *ad* D C : sed per hypothesim recta A D *ad* D C = A B *ad* C B : ergo radius A B ad radium C B = sinui A Z ad sinum C X : ergo per Theor. 8. Angulus A B D = D B C. Quod erat secundum.

Corollarium.

Hinc supposito quod recta A B = B C : patet rectam A D = D C : si angulus A B D = D B C; atque etiam vicissim, angulum A B D = D B C : si recta A D = D C.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim angulus A B D = D B C : ergo per Theor. 12. A B *ad* B C = A D *ad* D C : atqui per hypothesim, recta A B = B C : ergo recta A D = D C. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim recta A D = D C : & etiam recta A B = B C : ergo recta A B *ad* B C = A D *ad* D C : ergo per Theor. 12. Angulus A B D = D B C. Quod erat secundum.

Ani-

Animi gratia placet hic addere alteram demonſtrationem Theorematis 12. licet rigoroſa non ſit, in quantum aliqua ex parte innititur principio quod a me propoſitum eſt inter principia hypothetica.

Conſtructio. Ductæ ſint rectæ lineæ D E & D F occurrentes rectis B A & B C in punctis E & F, vt anguli D E A & D F C ſinguli ſint recti: præterea recta B X, occurrat rectæ A D, vt etiam angulus D X B ſit rectus.

Fig. 24.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim angulus A B D = C B D: ſed etiam per conſtructionem angulus D E B = D F B: ergo per Theor. 5. Triangulum B D E eſt ſimile triangulo B D F: ergo recta B D *ad* B D = D E *ad* D F: ergo D E = D F: ergo (*per a*) A B *in* D E ductu 3 *ad* B C *in* F D ductu 3 = A B *ad* B C: ſed A B *in* E D ductu 3 = triangulo A B D; item B C *in* F D ductu 3 = triangulo D B C: ergo recta A B *ad* B C = triangulo A B D ad triangulum D B C. Præterea (*per a*) A D *in* X B ductu 3 *ad* D C *in* X B ductu 3 = A D *ad* DC: ſed A D *in* X B ductu 3 = triangulo A B D: item D C *in* X B ductu 3 = triangulo D B C: ergo recta A D *ad* D C = triangulo A B D *ad* triangulum D B C: ſed etiam prius oſtendimus, rectam A B *ad* B C = triangulo A B D ad triangulum D B C: ergo recta A B *ad* B C = A D *ad* D C. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. A D *in* X B ductu 3 = triangulo A B D: item D C *in* X B ductu 3 = triangulo D B C: ſed A D *in* X B ductu 3 *ad* D C *in* X B ductu 3 = A D *ad* D C: ergo recta A D *ad* D C = triangulo A B D ad triangulum D B C: atqui per hypotheſim etiam recta A B *ad* B C = A D *ad* D C: ergo recta A B *ad* B C = triangulo A B D ad triangulum D B C: ſed A B *in* E D ductu 3 = triangulo A B D; item B C *in* F D ductu 3 = triangulo D B C: ergo recta A B *ad* B C = A B *in* E D ductu 3 *ad* B C *in* F D ductu 3: ergo (*per a*) recta E D = F D: ergo radius B D ad radiũ B D = ſinui D E ad ſinum D F: ergo per Theor. 8. Angulus A B D = D B C. Quod erat ſecundum.

a, ſextum axioma hypotheticum & Theorema 4. partis quartæ huius Ideæ.

Theorema XIII.

Fig. 25. Sit quoduis triangulum rectilineum A B C.

Dico angulum A B C † B C A † C A B = duobus rectis angulis.

Conſtructio per punctum B ducta ſit recta linea X Z parallela rectæ A C.

Demonſtratio per Theor. 4. Angulus B A C = A B X: ergo angulus A B X † A B C = B A C † A B C: atqui angulus A B X † A B C = X B C: ergo angulus X B C = B A C † A B C: ſed etiam per

Theor.

Theor. 4. Angulus C B Z = B C A : ergo angulus X B C † C B Z = B A C † A B C † B C A : sed per Theor. 2. Angulus X B C † C B Z = duobus rectis angulis : ergo angulus B A C † A B C † B C A = duobus rectis angulis. Quod erat.

Alia constructio. Per puncta A,B,C, descripta sit linea circularis & arcus A X = X B : item arcus B Z = Z C : denique arcus C R = R A. Fig. 26.

Altera demonstratio. Ex constructione patet, quod arcus B Z † C R † A X = dimidiæ circumferentiæ circuli, sed per Theor. 6. Arcus B Z = mensuræ anguli B A C : item arcus C R = mensuræ anguli A B C. Item arcus A X = mensuræ anguli A C B : ergo dimidia circuli circumferentia = mensuræ anguli B A C † A B C † B C A : sed etiam dimidia circuli circumferentia = mensuræ duorum rectorum angulorum : ergo mensuræ anguli B A C † A B C † B C A = mensuræ duorum rectorum angulorum : ergo per axioma 11. Angulus BA C † A B C † B C A = duobus rectis angulis. Quod asserebatur.

Theorema XIV.

Sit quoduis triangulum rectilineum A B C. Fig. 27.

Dico rectam A B ad rectam B C = sinui anguli A C B ad sinum anguli B A C, supposito eodem radio.

Constructio. Per puncta A B C descripta linea circularis habeat centrum R : & ductæ sint rectæ lineæ R X & R Z perpendiculares ad rectas A B & B C : atque illis occurrentes in punctis X & Z. Denique ductæ sint rectæ lineæ R A, R B, R C.

Demonstratio. Per constructionem angulus A X R = B X R : sed etiam recta A R = B R, & recta R X est communis : ergo per Theor. 5. Triangulum A R X est simile triangulo B R X : ergo angulus A R X = B R X : ergo angulus A R B, est duplus anguli B R X : sed etiam per Theor. 6. Angulus A R B est duplus anguli A C B : ergo angulus B R X = A C B : atqui supposito radio R B, recta B X est sinus anguli B R X : ergo supposito radio R B, recta B X = sinui anguli A C B. Simili plane discursu paret, supposito radio R B, rectam B Z = sinui anguli B A C ; igitur supposito eodem radio R B, sinus anguli A C B ad sinum anguli B A C = B X *ad* B Z : atqui B X *ad* B Z = A B *ad* B C. (quandoquidem B X = X A, & etiam B Z = Z C : quia triangulum A R X est simile triangulo B R X, & etiam triangulum C R Z est simile triangulo B R Z :) ergo supposito eodem radio R B, sinus anguli A C B ad sinum anguli B A C = A B *ad* B C. Quod erat demonstrandum.

IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS QVARTA.

ARGVMENTVM.

Nostro iudicio ex principijs rigorosis, Logisticis discursibus legitimè inferuntur, atque adeo rigorosis demonstrationibus stabiliuntur, præcipuæ, siue fundamentales proprietates, rationum aut proportionum: quæ hactenus à nemine aliter quam hypotheticis demonstrationibus fuerunt stabilitæ. In primo capite aliqua afferuntur spectantia ad proportionum doctrinam, vel prius à me, vel ab alijs traditam, quam existimamus, non aliter, quam hypotheticis demonstrationibus suffultam subsistere. In secundo capite affertur fundamentum doctrinæ nostræ de proportionibus, quam in tertio capite deducimus ex fundamento prius proposito.

CAPVT PRIMVM.

Proponuntur aliqua spectantia ad doctrinam de proportionibus.



Lura extant opera Mathematica R.P. Andreæ Taquet Societatis Iesu; in singulis habentur viri huius, præmatura morte sublati, patentia testimonia, profundæ intelligentiæ, atque doctrinæ, quam in Mathematicis fuerat assequutus. Quinto elementorum suorum libro, acturus de proportionibus præmittit sequentia.

Quanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto, & sexto libro. Sed quamuis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in ijs tamen quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in diffinitione quinta libri quinti vertitur: vbi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, siue duas rationes easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici

dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul maiora, vel simul minora. Atq; ex ea definitione omnes deinde quinti, & sexti libri demonstrationes mediatè, vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclideæ summa: quæ multiplicem, vt dixi, difficultatem habet. Nam imprimis certum est ea definitione non naturam æqualium rationum, sed affectionem solummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam signum infallibile rationum æqualium, vt quandocumque ea demonstrata fuerit de quibusuis rationibus inferre certò liceat æquales esse: vel is sensus illius est, vt per magnitudines eamdem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo iam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonstrare debuerat, eam affectionem omnibus, & solis rationibus æqualibus inesse, vt ex ea rationum æqualitas possit inferri. Id verò minimè vulgare Theorema est, quod neque Euclides, neque alius post Euclidem vllus demonstrauit. Si secundum: securi quidem erimus de veritate Theorematum in sensu definitionis acceptorum, minimè tamen ex vi demonstrationum nobis constare poterit de absoluta rationum æqualitate. Exemplum esto prima sexti. Certi erimus ex Euclidea demonstratione rationem triangulorum A B C, & D E F æqualem esse rationi basium A C, & D F per rationum æqualitatem solum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium: non colligemus tamen rationes illas triangulorum, basium rationibus verè & absolutè æquales esse, cum demonstratum non sit affectionem illam multiplicium cum absoluta, & vera rationum æqualitate necessario esse connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum quinti & sexti demonstrationes vacillant, quamdiu demonstratum non fuerit, veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate semper esse connexam. Denique vt sibi constarent omnia tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliisque semper displicuit, & tyronibus plurimum semper facessiuit negotij, quorum ita plerumque mentes intricat vt exitum vix reperiant. Quare vt doctrinam proportionum, quæ quasi medulla, atque anima Geometriæ, & vniuersæ Matheseos est, ab ea labe vindicemus, hæc tria præstare conabimur.

Primo ostendam libri quinti Theoremata quæ ab Euclide per multiplices demonstrantur eo fere loco habenda esse, quo axiomata, ac proinde declaratione potius subinde aliqua, quam demonstratione egere, &c.

Hæc P. Andreas Taquet: ex quibus satis constat, Euclideam doctrinam de proportionibus, rigorosis demonstrationibus stabilitam non esse, sed non nisi hypotheticè probatam subsistere: idemque verum esse, de doctrina aliorum Mathematicorum, pro qua Euclideæ multiplices adhibentur. Etenim rigorosè demonstrata dici non possunt,

ſunt, quæ aliqua ex parte innituntur aſſertionibus, neque rigorosè demonſtratis, neque per ſe notis. Quod attinet ad doctrinam P. Taquet, eius veſtigijs inſiſtendo, *cap.* 8. *lib.* 1. Logiſticæ, inter axiomata numeraui, varias veritates, quæ ab ipſo dicuntur axiomata: nuſquam tamen determinaui, vtrum ſint axiomata rigoroſa, an vero dici debeant axiomata hypothetica. Prædictæ veritates rigoroſa axiomata dici poterunt, ſi probari non poſſint, per aliquid magis notum; ſi vero hic eaſdem illas veritates legitimè inferam, ex aliqua veritate magis nota; ſimul oſtendam, per ſe, atque adeo maxime notas non eſſe, neque dici poſſe axiomata rigoroſa; ſiquidem nihil detur per ſe, ſiue ex ipſis terminis, atque naturæ lumine cognitis veritatibus, magis ſiue clarius cognitum: iam vero, ſi axiomata à P. Taquet aſſumpta pro doctrina de rationibus, non ſint rigoroſa axiomata, ſed tantum axiomata hyppthetica: dici non poterit, eam doctrinam rigoroſis demonſtrationibus ſuffultam ſubſiſtere, ſed pro illa allatæ demonſtrationes, debebunt dici hypotheticæ. Ego quidem, inter omnes doctrinas de rationibus quas hactenus vidi, à varijs authoribus conſcriptas, neque clariorem, neque magis fundatam inueni, illa, quæ proponitur à P. Taquet: quam propterea adhibere volui *cap.* 8. *lib.* 1. Logiſticæ noſtræ: ſed tamen exiſtimo eam non niſi hypotheticam eſſe; quodque hoc ipſum de ſua doctrina iudicet P. Taquet, intelliges, ſi legas libri quinti ſecundam partem, in qua operosè conatur adducere indicium, ex quo certo liceat diſtinguere rationes æquales, ab ijs, quæ inter ſe inæquales ſunt; & tandem aſſerit, quod ex allato à ſe indicio, omnes, quæ axiomata non ſunt, libri quinti Euclidis propoſitiones demonſtraret, niſi magis ex vſu diſcentium putaret, illas, ea methodo qua in prima parte vſus eſt, proponere.

An ego in hac parte Ideæ Logiſticæ, rigorosè demonſtrem illas veritates, quas prius cum P. Taquet aſſumpſeram tanquam axiomata, alijs iudicium relinquo: id à me factum videre, gratiſsimum fuiſſet P. Andreæ Taquet, quem iunior in Mathematicis magiſtrum habui, antequam accederem ad R.P. Gregorium à Sancto Vincentio, poſtremum meum in Mathematicis magiſtrum: quem deſerui huius ſæculi anno quinquageſimo nono, quando ex Belgio veni Romam, vbi non ab alijs diſcenda, ſed alios docenda Matheſi occupatus fui. Quantum ſupra memoratus vltimus meus in Mathematicis magiſter, reipublicæ litterariæ profuerit: quam multa, quam abſtruſa enodauerit, nemo Mathematicus ignorat; multorum iudicio, eam laudem meretur, quam præcipui præteritorum ſæculorum Geometræ ſunt aſſecuti. Libro 8. operis ſui Geometrici, de proportionalitatibus ita ſcripſit, vt nouam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe, cenſeri merito

debeat.

debeat. Ita testatur P.Taquet elementorum lib. 5.part.3.numero 3.vbi more suo nitidè proponit rationum additionem, subtractionem, multiplicationem, atque diuisionem, desumptam ex P.Gregorio, eadem doctrina hic indigemus: sed quoniam ab aliquibus non admittitur, paucis debeo indicare,quę spectant ad hãc controuersiã;pro qua sciendum, tam apud antiquos quam modernos Mathematicos vsitatissimum esse loquendi modum, in quo asseritur, vnam rationem compositam esse ex pluribus alijs rationibus: exempli gratia, rationem rectangulorum, esse compositam ex rationibus basium, & altitudinum: quare supposito quod rectanguli X, basis sit A, altitudo B, & insuper rectanguli Z, basis sit C, altitudo D:verum erit quod rectangulum X ad rectangulum Z, habeat rationem compositam, ex rationibus A *ad* C & B *ad* D; iam vero, si hæc ratio rectanguli X *ad* Z = A *ad* C † B *ad* D, ratio X *ad* Z, quæ dicitur composita ex rationibus A *ad* C & B *ad* D, erit composita per additionem; hoc est, ratio X *ad* Z,erit productum ex additione rationum A *ad* C & B *ad* D: adeoque compositio rationis non erit aliud quam rationum additio. verum si ratio X *ad* Z = A *ad* C *in* B *ad* D: ratio X *ad* Z, quæ dicitur composita ex rationibus A *ad* C & B *ad* D erit composita per multiplicationem; adeoque compositio rationum, nihil aliud erit, quam rationum multiplicatio. Iuxta supra memoratos magistros meos, compositio rationum nihil aliud est quam rationum multiplicatio;idẽ alij multi statuunt: sed tamen non desunt, qui oppositam partem tuentur, & asserunt, compositionem rationum nihil aliud esse quam rationum additionem. Si vtriusque partis propugnatores, aut eorum argumenta videre desideras, consule librum de natura & affectionibus rationum,& proportionum Geometricarum, scriptum à P.Francisco Xauerio Aynscom, e Societate Iesu.

Meo quidem iudicio maximi momenti cõtrouersia est, siquidem ab illa dependeat intelligentia ipsius cõceptus, qui apud Mathematicos correspondet vocibus,ratio,& proportio: & quoniam rationibus, atque proportionibus, nihil magis necessarium est pro vniuersa Mathesi: manifestum est, quam vtile, immo quam necessarium sit pro Matheseos studioso, intelligere, quid per rationes atque proportiones intelligatur à Mathematicis: quare tametsi prædictæ controuersiæ cõsideratio spectet ad quartum librum nostræ logisticæ, non possum hic prætermittere pauca aliqua ex dicto libro desũpta,ex quibus sufficienter constet,eos qui tuẽtur compositionem rationum fieri per additionem,non tantum nobis aduersari, verum etiam contrarios esse præcipuis ex antiquioribus Geometris,Euclidi,Archimedi,Appollonio Pergęo;& fortassis etiam veritati, atque ipsi dictamini rectæ rationis,

Iuxta prædictos antiquiores Geometras 4 *in* 4 *ad* 4 *in* 4 habet rationem compositam, ex ratione 4 *ad* 4, & ex ratione 4 *ad* 4: sed etiam ratio 4 *in* 4 *ad* 4 *in* 4 = 4 *ad* 4: ergo ratio composita ex rationibus 4 *ad* 4 & 4 *ad* 4 = 4 *ad* 4: ergo supposito quod ratio composita sit productum ex additione rationum, etiam ratio 4 *ad* 4 erit ratio producta ex additione duarum rationum 4 *ad* 4; ergo duæ rationes 4 *ad* 4 æquantur vni rationi 4 *ad* 4; ergo totum factum per additionem duarum rationum inter se æqualium, æquatur singulis ex duabus partibus ex quarum additione producitur. Hoc genus additionis plane ignotum est Euclidi, Archimedi, atque Apollonio Pergæo: ergo iuxta ipsos ratio composita non habetur per rationum additionem.

Respondent 4 *ad* 4 nullam habere rationem; vel sicut, o, siue nihil, inter numeros, ita rationem 4 *ad* 4 esse inter rationes reliquas; hinc quemadmodum nihil additum nihilo, non facit aliquid maius, aut minus: ita rationem 4 *ad* 4, additam rationi 4 *ad* 4, non facere aliquid maius, aut minus, ratione 4 *ad* 4: videndum igitur an hæc responsio subsistat.

Supposito quod 4 *ad* 4 sit nihil, siue nullam habeat rationem, subsumo, atqui ratio 2 *ad* 4 est vera ratio, & tamen minor ratione 4 *ad* 4: ergo ratio 2 *ad* 4 est ratio, & tamen minor ipso nihilo; & similiter, omnes rationes minoris inæqualitatis, erunt quidem rationes, ipso tamen nihilo minores. Hic laxate retia chimærarum venatores, & cæteris quantitatibus chimæricis, atque ipso nihilo minoribus, apponite chimæricas rationes; non chimæris, sed veritatibus delectabantur supra memorati authores; ego quod chimæris opponam aliud non habeo, nisi chimæras esse, & chimæras opponi veritati.

Deinde supposito quod 4 *ad* 4 nullam habeat rationem: subsumo, atqui 4 *in* 4 *ad* 4 *in* 4 = 4 *ad* 4: ergo 4 *in* 4 *ad* 4 *in* 4 nullam habet rationem: ergo 4 *in* 4 *ad* 4 *in* 4, nõ habet rationem duplicatam 4 *ad* 4: ergo quadrata inter se æqualia, item circuli inter se æquales, non habent duplicatam rationem suarum diametrorum; quod plane aduersatur singulis ex supra memoratis antiquioribus Geometris.

Rursus supposito quod 4 *ad* 4 nullam habeat rationem: subsumo, sed 4 & 4 sunt quantitates quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt: ergo omnes quantitates quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt, non habent inter se proportionem: ergo falsum quod asserit Euclides definitione 4 libri 5. elementorum: vbi affirmat, proportionem inter se habere quantitates omnes quæ multiplicatæ se inuicem superare possunt. Deinde nõ sufficit duas quantitates esse eiusdẽ generis, vt ad inuicem habeant aliquam rationem.

Præterea, vel ratio est quantitas, vel non est quantitas; si primum.

non

non minus manifeſtum eſt, rationem 4 *ad* 4 poſſe multiplicari per rationem 4 *ad* 4, quam rationem 4 *ad* 4 poſſe addi rationi 4 *ad* 4: quare ſi ratio 4 *ad* 4 = 4 *ad* 4 † 4 *ad* 4, aſſignanda eſſet illa ratio, cui æquetur ratio 4 *ad* 4 *in* 4 *ad* 4, an forte dici poteſt, quod ratio 4 *ad* 4 ſit nihil, & conſequenter ſicut nihil ductum in nihil producit nihil, etiam 4 *ad* 4 *in* 4 *ad* 4 = 4 *ad* 4? ſi hoc dicatur, infero, igitur 4 *ad* 4 reſpectu 4 *ad* 4 = 4 *ad* 4 reſpectu 4 *ad* 4: ergo ſi ex his quatuor rationibus vltima ratio 4 *ad* 4, eſt productum ex multiplicatione duarum mediarum, prima ratio 4 *ad* 4, erit illa, quæ inter rationes ſe habet vt vnitas inter numeros (vt patet ex ipſa natura, ſiue conceptu multiplicationis vſitato apud Euclidem, Archimedem Apollonium Pergæum) ergo ratio 4 *ad* 4, inter rationes, erit vt vnitas inter numeros: ſed etiam ratio 4 *ad* 4 erit vt nihil inter numeros, quod ab aduerſarijs aſſeritur, atq; adeo inter vnitatẽ & nihil nulla differẽtia inuenietur. Si ſecundum dicatur, nimirum rationem non eſſe quantitatem: ergo additio illa, ex qua habetur ratio compoſita, non eſt additio qua quantitates adduntur; quænam igitur iſta additio, quæ à rationibus admittitur, aut in quo differt à multiplicatione, quæ iuxta aduerſarios non admittitur à rationibus? certe hanc additionem non agnouerunt, neque Euclides, neque Archimedes, neque Apollonius Pergæus: quamobrem nouæ huius additionis inuentores, ſaltem afferre deberent definitionem, nouæ atque ab ipſis primum excogitatæ additionis: quare hæc definitio non affertur? an forte timent chimæras ſuas definire, atque deſcribere, ne appareant chimæræ?

Denique ſi o poteſt addi o, etiam o poteſt duci in o: ergo quemadmodũ ratio 4 *ad* 4 poteſt addi rationi 4 *ad* 4, ita etiam ratio 4 *ad* 4 poterit duci in rationem 4 *ad* 4: quænam igitur ratio, æquatur rationi, quæ producitur ex ratione 4 *ad* 4 ducta in rationem 4 *ad* 4: & vniuerſaliter loquendo, quodnam eſt, aut quomodo inuenitur productum ex duarum rationum multiplicatione? ego certe apud antiquos Geometras nunquam inueni additionem aut multiplicationem inſtitutam circa o, & ſi propriè loquendo verum eſt, quod o *in* o = o: ex conceptu multiplicationis Arithmeticæ, expoſito cap. 8. partis 2. huius ideæ, etiam 1 *ad* o = o *ad* o, an forte hoc non repugnat dictamini rectæ rationis? ſimiliter ſi propriè loquendo o † o = o: igitur productum ex additione, non eſt maius ſingulis genitoribus, ex quorum additione producitur: atque adeo totum propriè dictum, non eſt maius ſingulis ſuis partibus ſeorſim ſumptis; an hoc non aduerſatur primis Matheſeos principijs, & veritatibus per ſe notis, & cognitis lumine naturæ? apud Mathematicos, propriè loquendo, verum non eſt, o poſſe addi o, ea additione qua numeri adduntur: aut

o poſſe

o poſſe duci in o, eâ multiplicatione qua numeri multiplicantur: ſed quando dicitur o † o = o: ſenſus eſt, nihil manere nihil, quando nihilo non additur aliquid; ſimiliter quando dicitur 2 † o = 2: ſenſus eſt duo manere duo, quando numero duo non additur aliquid; pari modo quãdo dicitur o *in* o = o: ſenſus eſt, nihil non producere aliquid, quando nihil non ducitur in aliquid; & etiam quando dicitur o *in* 2 = o: ſenſus eſt, nihil non producere aliquid, quando non ducitur in duo. item quando dicitur 2 *in* o = o: ſenſus eſt duo non producere aliquid, quando non ducitur in aliquid.

Apud nos, ratio, quantitas eſt: & ratio æqualitatis, exempli gratia ratio 4 *ad* 4, inter reliquas rationes ſe habet vt vnitas inter reliquos numeros. Rationes maioris inæqualitatis, inter reliquas rationes ſe habent, vt numeri vnitate maiores, ad numeros qui vnitate maiores non ſunt. denique rationes minores inæqualitatis, inter reliquas rationes ſe habent, vt numeri fracti, ſiue vnitate minores, ad reliquos numeros, qui vnitate minores non ſunt; hinc quemadmodum 1 *in* 1 = 1, ita etiam 4 *ad* 4 *in* 4 *ad* 4 = 4 *ad* 4: vtrobique productum ex multiplicatione non eſt maius aut minus quouis genitore. item quemadmodum 6 *in* 1 = 6, ita ratio 6 *ad* 2 *in* 4 *ad* 4 = 6 *ad* 2: vtrobique productum æquatur ſuperiori genitori: item ſicut 6 *in* 3 = 18, ita 6 *ad* 2 *in* 3 *ad* 2 = 9 *ad* 2: vtrobique productum ex multiplicatione eſt maius quouis genitore. Item ſicut $\frac{2}{4}$ *in* $\frac{3}{6}$ = $\frac{6}{24}$, ita 2 *ad* 6 *in* 3 *ad* 6 = 2 *ad* 12: vtrobique productum ex multiplicatione eſt minus quolibet genitore.

Præterea ſicut 1 † 1 = 2, ita etiam 4 *ad* 4 † 4 *ad* 4 = 8 *ad* 4: vtrobique productum ex additione eſt maius quolibet genitore, item ſicut 6 † 1 = 7 ita etiam 6 *ad* 2 † 4 *ad* 4 = 8 *ad* 2: vtrobique productum ex additione eſt maius quolibet genitore, item ſicut 6 † 3 = 9, ita etiam 6 *ad* 2 † 3 *ad* 2 = 9 *ad* 2: vtrobique productum ex additione eſt maius quolibet genitore. Item ſicut $\frac{2}{4}$ † $\frac{3}{6}$ = $\frac{5}{6}$, ita 2 *ad* 6 † 3 *ad* 6 = 5 *ad* 6, vtrobique productum ex additione eſt maius quolibet genitore.

Denique rationem æqualitatis, inter reliquas rationes, ſe habere eo modo, quo vnitas ſe habet inter reliquos numeros, ita oſtendi poteſt: ex natura, ſiue conceptu multiplicationis patet, quod nunquam quantitas A *in* A = A, niſi A ſit vnitas: ſed quælibet ratio eſt quantitas: ergo nunquam ratio A *in* A = A, niſi ratio A ſit vnitas: atqui ſuppoſito quod littera A ſignificet rationem æqualitatis patet rationem A *in* A = A: ergo ratio æqualitatis, inter reliquas rationes, eſt veluti vnitas inter reliquos numeros.

CA-

CAPVT II.

Proponitur fundamentum doctrinæ nostræ de proportionibus, atque proportionalitatibus.

DE proportionum doctrina, vel alibi à me adhibita, vel ab alijs tradita, paucis egimus præcedenti capite: hic doctrinæ nostræ fundamentum proponimus, quod consistit in definitionibus atque axiomatibus quibus innititur. Ex definitionibus nobis necessarijs, aliquas attulimus in secunda parte huius Ideæ, quas hic non repetimus; similiter denuo non proponimus axiomata proposita in secunda parte, licet ex his aliqua nobis seruiant: sed tantum trado, quæ iudicaui differenda ad præsens caput: in quo prius proponimus definitiones aliquas, deinde nonnulla axiomata; notæ quæ definitionibus aut axiomatibus adduntur, videbantur conducere ad maiorem intelligentiam ac claritatem.

Omnes & solæ illæ duæ rationes, aut proportionalitates, dicantur inter se æquales, quæ habent hanc proprietatem: nimirum, vt productum ex Arithmetica multiplicatione, reali, vel æquiualente, extremorum terminorum: æquetur, producto ex multiplicatione, reali, vel æquiualente, mediorum terminorum. In secunda parte huius ideæ, capite tertio, exposuimus quomodo quæuis quantitas per aliam quamuis quantitatem aut realiter aut æquiualenter multiplicari possit, multiplicatione Arithmetica. Supposita hac definitione rationum æqualium, nihil plane requiritur nisi intelligentia scriptionum logisticarum, vt constet veritas tertij axiomatis huius capitis, atque negari non poterit axioma illud rigorosum esse, si allata hic rationum æqualium definitio legitima sit, ac talis, quæ admitti debeat inter rigorosa Matheseos principia: ego certe existimo eam talem esse, & ex pluribus quæ id suadent pauca aliqua hic subijcio.

Supposito exempli gratia, quod quantitas D, æquetur tot numeris X simul additis, quot vnitates continentur numero Z: erit quantitas D, productum ex Arithmetica additione: & insuper eadem quantitas D, erit productum ex Arithmetica multiplicatione, numerorum X & Z, quandoquidem igitur facile sit, atque nullam fere difficultatem annexam habeat, intelligere, quid sit quantitas D, quæ est productum ex additione Arithmetica: atque hæc eadem quantitas D, sit productum ex multiplicatione Arithmetica numerorum X & Z:

X & Z: facile est, & nullam fere difficultatem annexam habet, intelligere, quid sit quantitas D, cui æquatur X *in* Z: atque adeo facile est intelligere totam æquationem in qua dicitur quod D = X *in* Z. vt ab huiusmodi ęquationibus consistentibus inter quantitates absolutas, atque facile intelligibilibus, commodus transitus habeatur ad æquationes consistentes inter rationes, atque ab his ad priores æquationes pateat regressus: statuimus, in omni & solo casu in quo verum est D = X *in* Z, verum esse, 1 *ad* X = Z *ad* D: item 1 *ad* Z = X *ad* D; adeo vt legitime sequatur, D = X *in* Z: ergo 1 *ad* X = Z *ad* D: & insuper 1 *ad* Z = X *ad* D; quodque etiam vicissim legitime inferatur 1 *ad* X = Z *ad* D: vel 1 *ad* Z = X *ad* D: igitur D = X *in* Z. Huic veritati innititur Arithmeticæ multiplicationis definitio nostra, quam attulimus capite 8. secundæ partis huius Ideæ. iam vero admissa hac veritate, nimirum supposito quod D = X *in* Z legitime inferri 1 *ad* X = Z *ad* D, & insuper 1 *ad* Z = X *ad* D; atque vicissim supposito quod 1 *ad* X = Z *ad* D, vel 1 *ad* Z = X *ad* D: legitime sequi D = X *in* Z: per axioma 1 partis secundæ huius ideæ, etiã supposito quod A *in* D = X *in* A *in* Z *in* A patet legitime sequi 1 *in* A *ad* X *in* A = Z *in* A *ad* D *in* A, item 1 *in* A *ad* Z *in* A = X *in* A *ad* D *in* A; atque vicissim supposito quod 1 *in* A *ad* X *in* A = Z *in* A *ad* D *in* A, vel 1 *in* A *ad* Z *in* A = X *in* A *ad* D *in* A: legitime sequi A *in* D = X *in* A *in* Z *in* A; quare si vlterius supponatur quod X *in* A = B, item Z *in* A = C: facta hypothesi quod A *in* D = B *in* C, legitime sequetur A *ad* B = C *ad* D, item A *ad* C = B *ad* D: atque vicissim supposito quod A *ad* B = C *ad* D, vel A *ad* C = B *ad* D: legitime sequetur A *in* D = B *in* C. In hac vltima propositione ex prioribus deducta, habes tertium nostrum axioma: siue nostram definitionem rationum æqualium; atque ex ipso discursu satis patet, eidem fundamento, siue veritati inniti, definitionem Arithmeticæ multiplicationis, & definitionem nostram rationum æqualium: quare si posterior aliquo defectu laboret, etiam prior admitti non poterit vt plane legitima, licet hæc mihi propria non sit, sed mihi alijsque pluribus communis.

Præterea si allata à nobis definitio rationum æqualium legitima non est, aut talis, quæ admitti debeat inter rigorosa Matheseos principia: vel defectus eius, est aliquid commune definitionibus, ex quibus sua deducunt Euclides, Archimedes, Apollonius Pergæus &c. vel certe defectus eius, est aliquid non commune definitionibus, quibus vtuntur prædicti authores. Si primum, vel nostra definitio erit admittenda, vel cum nostra definitione abijciendæ erunt plures definitiones, quibus innituntur prædictorum authorum doctrinæ, atque adeo sublatis fundamentis, corruet tota illa Mathesis stricta, quæ ha-

ctenus

ctenus nulla melior aut firmior inuenta est, quamque pro secura basi in suis adhibent omnes fere moderni Geometræ: ex quibus proinde nullus nobis aduersari poterit, nisi simul sibi ipsi velit obesse. Si secundum aliquis aduertat, quod viderit mihi indicando, atque allatis legitimis argumentis suadendo, me sibi obstringet beneficio non vulgari.

Fateor quidem nostram definitionem talem non esse, quæ per genus & differentiam explicet naturam proportionum æqualium: tantum enim indicat proprietatem aliquam conuenientem omnibus & solis illis proportionibus, quæ inter se æquales dicuntur: verum qui negaret hoc genus definitionum admittendum esse, pro rigorosis principijs, non magis nobis aduersaretur, quam supra memoratis authoribus, atque ijs omnibus qui in suis supponunt prędictorum authorum doctrinam: atque adeo ex hoc capite definitionem nostram reprobare non poterit Geometra, qui sua non voluerit damnare. Rectam lineam definit Euclides, quæ ex æquali suis interijcitur punctis, siue quæ ex æquo suis terminis interijcitur; apud Archimedem recta linea est minima linearum eosdem terminos habentium. apud Platonem recta linea est cuius extrema obumbrant omnia media; ita testatur P. Taquet in suis elementis, vbi affirmat singularum definitionum hic propositarum, eumdem sensum esse. Considera iam si placet, vtrum allatæ definitiones rectæ lineæ, per genus & differentiam explicent rectæ lineæ naturam, vel certe aliud nihil contineant, quam proprietatem omnibus & solis rectis lineis conuenientem. similiter expende reliquas definitiones, ac denique illam, quæ apud Euclidem, aut alios, conuenit rationibus æqualibus, pro qua nos aliam hic attulimus: sic enim aduertes, inter nostram, & aliorum definitionem æqualium rationum, hanc præcipuam esse differentiam, quod nostra sit, & ab ijs, adferri non poterat, qui nobiscum communes non habebant quantitates æquiualentes, & quantitatum diuersarum scalam, logisticæ nostræ propriam, per quam à quantitate vnius generis transitus pateat, ad aliam, atque priori æquiualentem alterius generis quantitatem: sine quibus haberi non possunt ductus æquiualentes atque nostra definitio rationum æqualium foret restricta ad solas discretas quantitates, atque adeo plane inutilis pro Geometria.

Quæuis ratio dicitur componi ex illis rationibus, ex quibus producitur per multiplicationem, realem, vel æquiualentem. Hinc supposito quod ratio A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* R: legtime sequitur, rationem A *ad* R esse compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D. & viciſſim supposito quod ratio A *ad* R sit composita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D; legitime sequitur, quod ratio A *ad* B *in* C *ad* D = A

ad R. De rationum compoſitione pluribus egimus præcedenti capite.

Ratio compoſita ex duabus rationibus inter ſe æqualibus, dicitur duplicata vnius ex iſtis rationibus. Hinc legitime ſequitur, ratio A *ad* R eſt compoſita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D: & præterea A *ad* B = C *ad* D: ergo ratio A *ad* R eſt duplicata rationis A *ad* B. item viciſſim legitime ſequitur, ratio A *ad* R eſt duplicata rationis A *ad* B: ergo ratio A *ad* R componitur ex duabus rationibus quæ ſingulæ ſint æquales rationi A *ad* B. Ratio compoſita ex tribus rationibus inter ſe æqualibus, dicitur triplicata vnius ex iſtis rationibus: hinc legitime ſequitur ratio A *ad* R eſt compoſita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D & E *ad* F: & præterea A *ad* B = C *ad* D = E *ad* F: ergo ratio A *ad* R eſt triplicata rationis A *ad* B. item viciſſim legitime ſequitur, ratio A *ad* R eſt triplicata rationis A *ad* B: ergo ratio A *ad* R componitur ex tribus rationibus, quæ ſingulæ ſint æquales rationi A *ad* B. Pari modo ratio A *ad* R dicetur quadruplicata rationis A *ad* B, ſi A *ad* R componatur ex quatuor rationibus, quæ ſingulæ ſint æquales rationi A *ad* B. item ratio A *ad* R dicetur quintuplicata rationis A *ad* B, ſi ratio A *ad* R componatur ex quinque rationibus A *ad* B; atque ita de cæteris.

AXIOMATA.

I. Qualeſcunque ſint quantitates A & B, verum erit A *in* B = B *in* A.

Hinc ſuppoſito quod A *in* B = R: *per 6. axioma partis 2. huius ideæ,* legitime ſequitur B *in* A = R. Hoc axioma videtur immediate notum ex conceptu multiplicationis, atque intelligentia logiſticarum ſcriptionum.

II. Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, verum erit A *ad* B † C *ad* B = A † C *ad* B. item A *ad* B — C *ad* B = A — C *ad* B.

Hinc ſuppoſito quod A *ad* B † C *ad* B = A *ad* R: *per 6. axioma partis ſecundæ huius ideæ*, legitime ſequitur A † C *ad* B = A *ad* R. Rurſus ſuppoſito quod A *ad* B — C *ad* B = A *ad* R: *per 6. axioma partis 2. huius ideæ*: legitime ſequitur, A — C *ad* B = A *ad* R. Hoc axioma videtur, immediate patere ex conceptibus, Rationis, proportionalitatis, additionis, atque ſignificatione logiſticarum ſcriptionum.

III. Qua-

III. Qualescunque sint quantitates A,B, C, D, supposito quod A *in* D = C *in* B, etiam verum erat A *ad* B = C *ad* D, item A *ad* C= B *ad* D; prętere a vicissim supposito quod A *ad* B = C *ad* D, vel quod A *ad* C = B *ad* D: verum erit A *in* D = C *in* B.

Hoc axioma immediate patet ex definitione æqualium rationum, aut proportionalitatum, atque intelligentia logisticarum scriptionū.

Nota, tria axiomata hic proposita, non minus vera esse, quando singulæ litteræ A, B, C, D, significant singulas rationes: quam quando significant singulas quantitates absolutas; etenim singulæ rationes etiam sunt quantitates.

IV. Qualescunque sint quantitates A, B, C, verum erit A *ad* A *in* A *ad* C= A *ad* C.

Axioma patet quia ratio, siue proportio æqualitatis, inter reliquas rationes, est veluti vnitas inter reliquas discretas quantitates, ex quo fit quod ratio quæ ducitur in rationem æqualitatis, non crescat aut decrescat; qua de re plura videri possunt in præcedenti capite. Nobis videtur manifestum ex ijs quæ dicto capite statuimus de rationibus compositis.

V. Qualescunque sint quantitates A, B, C, verum erit, quod ratio A *ad* B respectu C *ad* B= A *ad* C.

Huic axiomati, æquiualet axioma quod à P. Andrea Taquet primo loco proponitur in libro 5. elementorum Geometriæ parte 3. numero 4. atque sequentibus verbis exprimitur *proportiones commune habentes consequens eam inter se proportionem habent quam antecedentia*. Quintum nostrum axioma videtur manifestum ex terminis prius à nobis expositis, atque intelligentia logisticarum scriptionum; etenim ex ipso conceptu rationis satis patet, quod manente eodem rationis consequente termino B, tantum augeatur vel imminuatur ratio A *ad* B, quantum augetur vel imminuitur antecedens terminus A: quare etiam ratio A *ad* B, debet esse tanto maior vel minor ratione C *ad* B, quanto antecedens terminus A, est maior aut minor antecedente termino C.

Placet hic animi gratia assumere difinitionem rationum æqualium, diuersam ab ea quam paulo ante attulimus, atque ex illa deducere veritatem propositam in tertio axiomate; licet enim hic modus stabiliendi tertium axioma, parum mihi arrideat quia prolixior est, tamen

men non displicet, in quantum conducit ad eamdem veritatem, ad quam priori modo commodius peruenitur.

Duæ rationes A *ad* B *&* C *ad* D dicantur similes, eædem, atque æquales: quando quantitas A, ita, siue eodem modo magna est respectu facto ad quantitatem B: sicut quantitas C, magna est respectu facto ad quantitatem D. triplici casu potest dici quantitatem A, ita, siue eodem modo magnam esse, respectu facto ad quantitatem B, sicut quantitas C magna est respectu facto ad quantitatem D. Primo si quantitas A, ita, siue eodem modo superet atque excedat quantitatem B, sicut quantitas C superat siue excedit quantitatem D. Secundo si quantitas A, ita, siue eodem modo deficiat siue excedatur à quantitate B, sicut quantitas C deficit siue exceditur à quantitate D. Tertio si quantitas A, ita, siue eodem modo æquetur quantitati B, sicut quantitas C æquatur quantitati D. In singulis his tribus casibus, quantitas A, ita, siue eodem modo magna erit respectu facto ad quantitatem B, sicut quantitas C magna est respectu facto ad quantitatem D. Quid sit A eodem modo æquari B, sicut C æquatur D, satis clarum est, quia æqualitas in indiuisibili consistit: adeo vt A, non dicatur æquari B, nisi verum sit quod quantitas A, non sit maior aut minor B: atque adeo verum esse non potest, A eodem modo æquari B, sicut C æquatur D, nisi A æquetur B, & insuper C æquetur D: quod etiam sufficit, vt A dicatur eodem modo æquari B, sicut C æquatur D. Quid vero sit, A eodem modo superare B, vel deficere à B, quemadmodum C superat D, vel deficit à D, vocibus clarius exponere, non est ita facile: id tamen intelligere necessarium est, pro vsu definitionis rationum æqualium quam hic proposuimus; quidquid igitur sit de clariori expositione prædictarum vocum, hoc videtur & certum & manifestum, quod si Caius & Titius non nisi aurum & argentum habeant, vt sint æque diuites, necesse erit vt Caij aurum, ita, siue eodem modo superet aurum Titij: sicut Titij argentum, superat argentum Caij: & vicissim si Caij aurum, ita, siue eodem modo superat aurum Titij; sicut Titij argentum superat argentum Caij: tunc Caius & Titius erunt æque diuites; & quidquid sit de vlteriori expositione vocum, ita, siue eodem modo superare, prædictæ loquutiones dici possunt satis claræ, vtpote passim vsitatæ. Quod si ita est, etiam supposito quod dentur duo rectangula, hoc est duo concreta longitudinis atque altitudinis: eo ipso quod longitudinis atque latitudinis concretum X, æquetur longitudinis atque altitudinis concreto Z: etiam manifestum est, primum concretum X, sua longitudine, ita, siue eodem modo superare, secundi concreti Z longitudinem; sicut secundi concreti altitudo, superat primi concreti altitu-

titudinem; & viciſſim ex eo quod primi concreti longitudo, ita, ſiue eodem modo ſuperat ſecundi concreti longitudinem: ſicut ſecundi concreti altitudo ſuperat primi concreti altitudinem: videtur manifeſtum, primum concretum æquari ſecundo concreto. Iam vero quoniam primum concretum, hoc eſt concretum longitudinis & altitudinis rectanguli X, eſt idem cum rectangulo X; item ſecundum concretum, hoc eſt concretum longitudinis & altitudinis rectanguli Z, eſt idem cum rectangulo Z; & præterea (vt cum Euclide alij plures loquuntur, & ſecundum nos verum eſt, accipiendo menſuram pro re menſurata) rectanguli X longitudo ſit recta A, altitudo ſit recta D: item rectanguli Z longitudo ſit recta B, altitudo recta C: etiam ex eo quod rectangulum X æquetur rectangulo Z, manifeſte ſequitur, rectam A, ita, ſiue eodem modo ſuperare rectam B, ſicut recta C ſuperat rectam D: & viciſſim ex eo quod recta A, ita ſuperat rectam B, ſicut recta C ſuperat rectam D: manifeſte ſequitur rectangulum X æquari rectangulo Z; atqui ex allata hic definitione rationum æqualium, conſtat A *ad* B = C *ad* D, quoties A ita ſuperat B, ſicut C ſuperat D: ergo ex eo quod rectangulum X æquetur rectangulo Z, etiam patet A *ad* B = C *ad* D: & viciſſim ex eo quod A *ad* B = C *ad* D, patet quod rectangulum X æquetur rectangulo Z: atqui etiam A *in* D ductu primo, eſt idem cum rectangulo X: item C *in* B ductu primo, eſt idem cum rectangulo Z: ergo ex eo quod A *in* D ductu primo = C *in* B ductu primo: etiam patet A *ad* B = C *ad* D: & viciſſim ex eo quod A *ad* B = C *ad* D: etiam patet A *in* D ductu primo = C *in* B ductu primo: atqui etiam A *in* D ductu primo = A *in* D: item C *in* B ductu primo = C *in* B: ergo ex eo quod A *in* D = C *in* B manifeſtum eſt A *ad* B = C *ad* D: & etiã viciſſim ex eo quod A *ad* B = C *ad* D, manifeſtum eſt A *in* D = C *in* B. Denique quod hactenus oſtendimus verum eſſe, ſuppoſito quod litteræ A, B, C, D ſingulæ ſignificenr aut rectas lineas, aut quantitates diſcretas æquiualentes iſtis rectis lineis: idem verum eſſe qualeſcunque alias quantitates diſcretas ſignificent litteræ A, B, C, D, tam manifeſtum eſt, quam clare patet, vnam quantitatem diſcretam ab altera quantitate diſcreta non aliter differre, quam quod maior ſit aut minor, vt conſtat ex ipſo conceptu quantitatis diſcretæ: ergo qualeſcunque quantitares ſignificent litteræ A, B, C, D, ex eo quod A *in* D = C *in* B patet A *ad* B = C *ad* D; & viciſſim ex eo quod A *ad* B = C *ad* D: conſtat neceſſario A *in* D = C *in* B; ſimiliter ex eo quod A *in* D = B *in* C patet A *ad* C = B *ad* D: & viciſſim ex eo quod A *ad* C = B *ad* D, conſtat A *in* D = B *in* C; atqui eo ipſo quod A *in* D = C *in* B, neceſſario per 1 axioma A *in* D = B *in* C: ergo ex eo quod A *in* D = C *in* B: patet A *ad* B

= C

= C *ad* D: item A *ad* C= B *ad* D; atque viciſſim, ex eo quod A *ad* B = C *ad* D; vel A *ad* C= B *ad* D: conſtat A *in* D= C *in* B. Vt aſſeritur in tertio axiomate.

Ex diſcurſu, quem animi gratia hic propoſuimus, obiter colligi poteſt, non defuiſſe nobis modum ſtabiliendi veritatem in tertio axiomate propoſitam, diuerſum, ab eo quem putauimus adhibendum, atque præferendum reliquis qui nobis occurrebant. Præterea in propoſito hic diſcurſu obſeruari poteſt, quomodo mediantibus quantitatibus æquiualentibus, proprietatem in rectangulis facile intelligibilem transferendo prius ad quantitates diſcretas, tandem concludamus, eam quibuſcunque quantitatibus conuenire.

CAPVT III.

Proponitur doctrina noſtra de proportionibus, atque proportionalitatibus, deducta ex fundamento poſito ſuperiori capite.

Theorema I.

QValeſcunque quantitates ſint A & B.

Dico A = A per B *in* B ≏ B *in* A per B.

Demonſtratio. Ex conceptu diuiſionis, A per B *ad* A = 1 *ad* B: ergo *per* 3. *axioma*, etiam A per B *in* B = 1 *in* A: ſed 1 *in* A = A: ergo A = A per B *in* B: atqui *per* 1. *axioma*, A per B *in* B = B *in* A per B: ergo A = A per B *in* B ≏ B *in* A per B. Quod erat demonſtrandum.

Theorema II.

QValeſcunque quantitates ſint A, B, C.

Dico primo. Poſito quod A = B: etiam A *ad* C = B *ad* C.

Dico ſecundo. Poſito quod A *ad* C = B *ad* C: etiam A = B.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim A = B: ſed etiam C = C: ergo *per* 3. *axioma partis ſecundæ*, A *in* C = B *in* C: ergo *per* 3. *axioma*. A *ad* C = B *ad* C. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim A *ad* C = B *ad* C: ergo *per* 3. *axioma*, A *in* C = C *in* B: ergo *per* 3. *axioma*, etiam A *ad* B = C *ad* C: ſed C= C: ergo A= B. Quod erat ſecundum.

Theo-

Theorema III.

Qualescunque sint quantitates A, B, C,
Dico primo. A *ad* B = C *ad* B *per* A *in* C.
Dico secundo. A *ad* B = C *ad* C *in* B *per* A.
Dico tertio. A *ad* B = C *ad* B *in* C *per* A.
Dico quarto. A *ad* B = C *ad* C *per* A *in* B.

Demonstratur prima pars. Per 1. theorema A *in* B *per* A = B: ergo *per* 1. *axioma partis secundæ ideæ*, A *in* B *per* A *in* C = B *in* C: ergo *per* 3. *axioma*, A *ad* B = C *ad* B *per* A *in* C. Quod erat primum.

Demonstratur 2. pars. Per 1. axioma B *per* A *in* C = C *in* B *per* A: ergo *per* 2. *theorema*, C *ad* C *in* B *per* A = C *ad* B *per* A *in* C: sed *per primam partem*, A *ad* B = C *ad* B *per* A *in* C: ergo A *ad* B = C *ad* C *in* B *per* A. Quod erat secundum.

Demonstratur tertia pars. Per 1. *axioma* C *in* B = B *in* C: ergo *per* 1. *axioma partis secundæ ideæ*, C *in* B *per* A = B *in* C *per* A: ergo *per* 2. *theorema*, C *ad* C *in* B *per* A = C *ad* B *in* C *per* A: sed *per secundam partem*, A *ad* B = C *ad* C *in* B *per* A: ergo *per* 6. *axioma partis secundæ ideæ*, A *ad* B = C *ad* B *in* C *per* A. Quod erat tertium.

Demonstratur quarta pars. Per 1. axioma B *in* C *per* A = C *per* A *in* B: ergo *per* 2. *theorema*, C *ad* C *per* A *in* B = C *ad* B *in* C *per* A: sed *per* 3. *partem*, A *ad* B = C *ad* B *in* C *per* A: ergo A *ad* B = C *ad* C *per* A *in* B. Quod erat quartum.

Corollarium.

Hinc patet, B *per* A *in* C = C *in* B *per* A ♎ B *in* C *per* A ♎ C *per* A *in* B. Etenim C, ad singulas illas quantitates, habet proportionem æqualem rationi A *ad* B: ergo *per* 2. *theorema* singulæ illæ quantitates sunt æquales inter se.

Theorema IV.

Qualescunque quantitates sint A, B, C, D.
Dico primo. Posito quod B = D: etiam A *ad* C = A *in* B *ad* C *in* D ♎ A *per* B *ad* C *per* D.
Dico secundo. Posito quod A *in* B *ad* C *in* D = A *ad* C: vel quod A per B *ad* C *per* D = A *ad* C: etiam B = D.

De-

Demonſtratur prima pars. Per 1. axioma A *in* B *in* C = C *in* B *in* A: ergo *per* 3. *axioma* A *in* B *ad* C *in* B = A *ad* C: ſed *per hypotheſim* B = D: ergo A *in* B *ad* C *in* D = A *ad* C. Præterea *per corollarium tertij theorematis*, A *per* B *in* C = A *in* C *per* B: ſed *per hypotheſim*, B = D: ergo A *per* B *in* C = A *in* C *per* D: ergo *per* 3. *axioma* A *per* B *ad* C *per* D = A *ad* C: ſed etiam oſtendimus A *in* B *ad* C *in* D = A *ad* C: ergo A *ad* C = A *in* B *ad* C *in* D ♎ A *per* B *ad* C *per* D. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim A *in* B *ad* C *in* D = A *ad* C: ergo *per* 3. *axioma* A *in* B *in* C = A *in* D *in* C: ergo B = D. Rurſus per hypotheſim A *per* B *ad* C *per* D = A *ad* C: ergo *per* 3. *axioma*, A *per* B *in* C = C *per* D *in* A: ſed *per corollarium* 3. *theorematis*, etiam A *per* B *in* C = C *per* B *in* A: ergo C *per* D *in* A = C *per* B *in* A: ergo B = D. Patet igitur &c.

Corollarium.

Hinc patet quod ſi ſint tres quantitates A, B, C, tunc A *ad* C = A *in* B *ad* C *in* B ♎ A *per* B *ad* C *per* B. Etenim ſuppoſito quod B = D, *per* 4. *theorema* A *ad* C = A *in* B *ad* C *in* D ♎ A *per* B *ad* C *per* D: ſed quoniam per hypotheſim B = D: etiam *per* 1. *axioma ſecunda partis ideæ* C *in* D = C *in* B: item C *per* D = C *per* B: ergo A *ad* C = A *in* B *ad* C *in* B ♎ A *per* B *ad* C *per* B.

Theorema V.

Qualeſcunque quantitates ſint A, B, C, D, ita tamen vt A *ad* B = C *ad* D.

Dico primo. Inuertendo B *ad* A = D *ad* C.

Dico ſecundo. Permutando A *ad* C = B *ad* D.

Dico tertio. Componendo A † B *ad* B = C † D *ad* D.

Dico quarto. Diuidendo A — B *ad* B = C — D *ad* D.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D; ergo *per* 3. *axioma*, A *in* D = B *in* C: ergo B *in* C = A *in* D: ergo *per* 3. *axioma* B *ad* A = D *ad* C. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D: ergo *per* 3. *axioma*, etiam A *in* D = C *in* B: ergo *per* 3. *axioma*, A *ad* C = B *ad* D. Quod erat ſecundum.

Demonſtratur tertia pars. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D: ſed etiam

etiam B *ad* B = D *ad* D : ergo , *per* 1. *axioma secundæ partis ideæ* , A *ad* B + B *ad* B = C *ad* D + D *ad* D : sed *per* 2.*axioma* A *ad* B + B *ad* B = A + B *ad* B , item C *ad* D + D *ad* D = C + D *ad* D : ergo, *per* 6. *axioma partis secundæ* , A + B *ad* B = C + D *ad* D. Quod erat tertium .

Demonstratur quarta pars . Per hypothesim A *ad* B = C *ad* D: sed etiam — B *ad* B = — D *ad* D: ergo *per* 1 *axioma partis secundæ*, A *ad* B — B *ad* B = C *ad* D — D *ad* D : atqui, *per* 2.*axioma*, A *ad* B — B *ad* B = A — B *ad* B, item C *ad* D — D *ad* D = C — D *ad* D: ergo A — B *ad* B = C — D *ad* D . Quod erat quartum .

Nota quatuor assertiones in hoc theoremate propositas, continere quatuor diuersos (vt ita dicam) argumentandi modos, maxime vsitatos, quique singuli habent nomen proprium vsu receptum: quare hæc nomina putaui retinenda. Aduertendum tamen, quod quando ex duarum rationum æqualitate, componendo, infertur aliarum duarum rationum æqualitas: non agatur de illa rationum compositione, qua ratio aliqua dicitur composita ex aliis pluribus rationibus ; etenim rationes quæ componendo inferuntur æquales esse , habentur per additionem rationum : vt patet ex demonstratione hic allata ; verum ratio illa quæ dicitur composita ex pluribus rationibus , habetur per multiplicationem, vt pluribus diximus capite primo ; & quoniam hic nobis vsui est rationum additio , ad stabiliendum eum argumentandi modum , quo componendo aliquid infertur : immo hic argumentandi modus, & maxime vsitatus sit, & nihil contineat præter rationũ additionem : percipere non possum , quo fundamento, aut discursu persuasi aliqui authores , tam libere pronuntient , rationum additionem, nullam plane vtilitatem aut vsum habere, apud eos, qui nobiscum statuunt, rationem compositam haberi per multiplicationem.

Theorema VI.

QValescunque sint quantitates A , B , C , D , E , F : ita tamen , vt A *ad* B = D *ad* E : atque insuper B *ad* C = E *ad* F. Dico ex æquo , etiam A *ad* C = D *ad* F.

Demonstratio. Quoniam per hypothesim, A *ad* B = D *ad* E: permutando , A *ad* D = B *ad* E : sed etiam *per hypothesim*, B *ad* C = E *ad* F, adeoque permutando , B *ad* E = C *ad* F ; ergo ratio A *ad* C = D *ad* E , & insuper C *ad* F = D *ad* E: ergo *per* 6.*axioma partis secundæ*, etiam A *ad* D = C *ad* F : ergo , *permutando* , A *ad* C = D *ad* F . Quod erat demonstrandum .

In hoc theoremate propositus argumentandi modus , proprium ;

atque vſu receptum nomen habet, quod illi appoſui: etenim ex æquo, vel (vt alij loquuntur) ex æquali, vel æqualitate rationum, infertur conſequens. Hunc argumentandi modum non extendo ad caſus in quibus plus quam ſex termini proponuntur, ſinguli enim illi caſus non requirunt niſi iteratum vſum argumenti propoſiti.

Theorema VII.

QValeſcunque quantitates ſint A, B, C, D, F.

Dico primo. Suppoſito quod D *ad* F = A *ad* B: etiam A *in* C *ad* B *in* D = C *ad* F.

Dico ſecundo. Suppoſito quod A *in* C *ad* B *in* D = C *ad* F: etiam D *ad* F = A *ad* B.

Demonſtratur prima pars. Per corollarium 4. theorematis A *in* D *ad* B *in* D = A *ad* B: ſed, *per hypotheſim*, etiam D *ad* F = A *ad* B: ergo, *per 6. axioma partis ſecundæ*, A *in* D *ad* B *in* D = D *ad* F: quoniam igitur, *per corollarium 4. theorematis*, A *in* C *ad* A *in* D = C *ad* D: & inſuper vt iam oſtendimus A *in* D *ad* B *in* D = D *ad* F: *per 6. theorema* ex æquo, A *in* C *ad* B *in* D = C *ad* F. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim A *in* C *ad* B *in* D = C *ad* F: ergo, *per 3. axioma* A *in* C *in* F = C *in* B *in* D: ſed, *per 1 axioma*, C *in* A *in* F = A *in* C *in* F: ergo C *in* A *in* F = C *in* B *in* D: ergo, *per 3. axioma* C *ad* B *in* D = C *ad* A *in* F: ergo, *per 2. theorema*, B *in* D = A *in* F: ergo etiam D *in* B = F *in* A: ergo, *per 3. axioma* D *ad* F = A *ad* B. Quod erat ſecundum.

Theorema VIII.

QValeſcunque ſint quantitates A, B, C, D.

Dico primo. Poſito quod A *ad* B = C *ad* D: etiam A = B *in* C per D.

Dico ſecundo. Poſito quod A = B *in* C *per* D: etiam A *ad* B = C *ad* D.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim A *ad* B = C *ad* D: ergo inuertendo B *ad* A = D *ad* C: atqui, *per 3. theorema*, D *ad* C = B *ad* B *in* C *per* D: ergo, *per 6. axioma partis ſecundæ*, B *ad* A = B *ad* B *in* C *per* D: ergo, *per 2. theorema*, A = B *in* C *per* D: vt dicitur in prima aſſertione.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypoteſim A = B *in* C *per* D: ergo, *per 2. theorema*, B *ad* A = B *ad* B *in* C *per* D: ſed, *per 3. theorema*, etiam

D *ad*

D *ad* C = B *ad* B *in* C *per* D : ergo, *per 6.axioma partis secundæ*, B *ad* A = D *ad* C: ergo, *per 5. theorema, inuertendo*, A *ad* B = C *ad* D. Quod erat secundum.

Theorema IX.

Qualescunque sint quantitates A, B, C.

Dico primo. Supposito quod A *in* B = C: etiam C *per* A = B, & insuper C *per* B = A.

Dico secundo. Supposito quod C *per* B = A, vel quod C *per* A = B: etiam A *in* B = C.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim A *in* B = C: ergo, *ex conceptu multiplicationis*, 1 *ad* A = B *ad* C: ergo, *per 5. theorema, inuertendo*, A *ad* 1 = C *ad* B: ergo, *permutando*, A *ad* C = 1 *ad* B, & insuper B *ad* C = 1 *ad* A: ergo, *ex conceptu diuisionis*, C *per* A = B: & insuper C *per* B = A. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim C *per* B = A, vel certe C *per* A = B: ergo, *ex conceptu diuisionis*, B *ad* C = 1 *ad* A, vel A *ad* C = 1 *ad* B: ergo, *per 3. axioma*, A *in* B = 1 *in* C: sed 1 *in* C = C: ergo A *in* B = C. Vt asseritur in secunda parte.

Theorema X.

Qualescunque sint quantitates B, C, D.

Dico. B *per* D *ad* B *per* C = C *ad* D.

Demonstratio. Per 1 theorema B *per* D *in* D = B, & etiam B *per* C *in* C = B: ergo B *per* D *in* D = B *per* C *in* C: ergo, *per 3. axioma* B *per* D *ad* B *per* C = C *ad* D. Quod erat demonstrandum.

Theorema XI.

Qualescunque quantitates sint A, B, C, D, F, ita tamen, vt D *ad* F = A *ad* B.

Dico A *per* D *ad* B *per* C = C *ad* F.

Demonstratio. Per 10. theorema, A *per* D *ad* A *per* C = C *ad* D: sed, *per corollarium 4.theorematis*, etiam A *per* C *ad* B *per* C = A *ad* B = D *ad* F, vt patet ex hypothesi: ergo, *per 6.theorema*, ex æquo, A *per* D *ad* B *per* C = C *ad* F. Quod erat demonstrandum.

Theorema XII.

QValescunque sint quantitates A, B, C.

Dico primo. Rationem A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* C.

Dico secundo. Rationem A *ad* B = A *ad* C *per* B *ad* C. Atque insuper rationem B *ad* C = A *ad* C *per* A *ad* B.

Demonstratur prima pars. Per 5. axioma B *ad* B respectu A *ad* B = B *ad* A: & insuper B *ad* C respectu A *ad* B = B *ad* A: ergo, *per 6. axioma secunda partis ideæ*, B *ad* B respectu A *ad* B = B *ad* C respectu A *ad* C: ergo, *per 3. axioma*, B *ad* B *in* A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* C: atqui, *per 4. axioma*, B *ad* B *in* A *ad* C = A *ad* C: ergo A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* C. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per primam partem A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* C: ergo, *per theorema* 9. etiam A *ad* B = A *ad* C *per* B *ad* C, & insuper B *ad* C = A *ad* C *per* A *ad* B. Quod erat secundum.

Theorema XIII.

SInt quæcunque, & quotcunque quantitates, quarum prima sit A, vltima sit X.

Dico rationem extremarum quantitatum, nimirum A *ad* X, esse illam quæ producitur per multiplicationem, ex omnibus medijs rationibus. Siue rationem extremorum terminorum, esse compositam ex omnibus rationibus medijs.

Constructio. Inter extremos terminos A & X, positi sint tres alij termini B, C, D.

Demonstratio. Per 12. Theorema, A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* C: ergo, *per* 1. *axioma partis secundæ*, A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* B *in* B *ad* C *in* C *ad* D: sed, *per* 12. *theorema*, A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* D: ergo A *ad* D = A *ad* B *in* B *ad* C *in* C *ad* D: ergo, *per* 1. *axioma partis secundæ*, A *ad* D *in* D *ad* X = A *ad* B *in* B *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* X: sed, *per* 12. *theorema*, A *ad* D *in* D *ad* X = A *ad* X; ergo A *ad* X = A *ad* B *in* B *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* X. Patet igitur veritas theorematis, supposita constructione, in qua inter extremos terminos A & X, tres alij termini interpositi sunt: & simili plane discursu infertur eiusdem theorematis veritas, supposita constructione, qua inter extremos terminos A & X, quotcunque medij termini interponuntur: atque adeo vniuersaliter constat verum esse, quod in theoremate asseritur.

Theorema hic à nobis propositum, atque demonstratum, aliter ex suis prin-

principijs deducit P. Taquet, libro 5. parte 3. nu. 12. suorum elementorum; ubi notat sequentia. Theorema in numeris demonstratum est à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonstraret nemo hactenus inuentus est. Vnde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra libro 8. ad principium secundum, censet inter principia numerandum esse; donec alicui demonstratio occurrerit, quâ inter Theoremata referri possit.

Theorema XIV.

Sint quæuis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo. A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* F: si B *ad* F = C *ad* D.

Dico secundo. B *ad* F = C *ad* D: si A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* F.

Theorematis sensus est, rationem compositam, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, esse æqualem rationi A *ad* F: si ratio B *ad* F æquetur rationi C *ad* D. Atque vicissim, rationem B *ad* F, esse æqualem rationi C *ad* D: si ratio composita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, sit æqualis rationi A *ad* F.

Demonstratur prima pars. Per 12. theorema A *ad* B *in* B *ad* F = A *ad* F: sed, *per hypothesim* B *ad* F = C *ad* D: ergo, *per axioma* 1. & 6. *partis secundæ* A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* F. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per 12. theorema A *ad* F = A *ad* B *in* B *ad* F: sed etiam, *per hypothesim*, A *ad* F = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo A *ad* B *in* B *ad* F = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, *per 3. axioma*, A *ad* B respectu A *ad* B = C *ad* D respectu B *ad* F: sed A *ad* B = A *ad* B: ergo C *ad* D = B *ad* F. Quod erat secundum.

Theorema XV.

Sint quæuis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B: si C = D.

Dico secundo C = D: si A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B.

Theorematis sensus est, rationem compositam, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, esse æqualem rationi A *ad* B: si C æquatur D; atque vicissim C esse æqualem D: si ratio composita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, sit æqualis rationi A *ad* B.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim C = D: ergo, *per* 2. *theorema*, C *ad* C = C *ad* D: sed, *per* 4. *axioma*, A *ad* B *in* C *ad* C = A *ad* B: ergo, *per 6. axioma partis secundæ*, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B. Quod erat primum.

De-

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B: sed, *per 4 axioma*, etiam A *ad* B *in* C *ad* C = A *ad* B: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B *in* C *ad* C: ergo, *per 3. axioma*, A *ad* B respectu A *ad* B = C *ad* C respectu C *ad* D: atqui C = C: ergo C = D. Quod erat secundum.

Theorema XVI.

Sint quævis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo. A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A: si A *ad* B = D *ad* C.

Dico secundo. A *ad* B = D *ad* C: si A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A.

Theorematis sensus est, rationem compositam, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, esse rationem æqualitatis: si rationes componentes habeant terminos reciproce proportionales. Atque vicissim terminos rationum A *ad* B & C *ad* D esse reciproce proportionales: si ratio composita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, sit ratio æqualitatis.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim, A *ad* B = D *ad* C: ergo, per 5. theorema, inuertendo, B *ad* A = C *ad* D: ergo, *per 1. axioma partis secundæ*, A *ad* B *in* B *ad* A = A *ad* B *in* C *ad* D: sed, *per 14. theorema*, A *ad* B *in* B *ad* A = A *ad* A: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A: sed, *per 14. Theorema*, etiam A *ad* B *in* B *ad* A = A *ad* A: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B *in* B *ad* A: ergo, *per 3. axioma*, A *ad* B respectu A *ad* B = C *ad* D respectu B *ad* A: sed A *ad* B = A *ad* B: ergo B *ad* A = C *ad* D: ergo, *per 5. theorema, inuertendo*, A *ad* B = D *ad* C. Quod erat secundum.

Theorema XVII.

Qualescunque quantitates sint A, B, C, D.

Dico. A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* B *in* C *ad* D.

Theorematis sensus est, productum ex A ducto *in* C, ad productum ex B ducto *in* D, habere rationem compositam, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D.

Constructio. C *ad* D = B *ad* F.

Demonstratio. Per 12. theorema, A *ad* B *in* B *ad* F = A *ad* F: sed, *per constructionem*, C *ad* D = B *ad* F: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* F: atqui, *per constructionem*, *&* *7. theorema*, etiam A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* F:

ad F:ergo A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* B *in* C *ad* D. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

HInc patet, A 2 *ad* B 2 = A *ad* B *in* A *ad* B. Etenim, *per* 17. *theorema*, A *in* A *ad* B *in* B = A *ad* B *in* A *ad* B: atqui A *in* A = A 2, item B *in* B = B 2: ergo A 2 *ad* B 2 = A *ad* B *in* A *ad* B.

Theorema XVIII.

SInt quæuis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo. A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2: ſi A *ad* B = C *ad* D.

Dico ſecundo. A *ad* B = C *ad* D: ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2.

Theorematis ſenſus eſt, rationem compoſitam, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, eſſe duplicatã rationis A *ad* B: ſi ratio A *ad* B ſit æqualis rationi C *ad* D. Et viciſſim rationem A *ad* B, eſſe æqualem rationi C *ad* D: ſi ratio compoſita, ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, eſt duplicata rationis A *ad* B.

Demonſtratur prima pars. Per 17. theorematis corollarium, A *ad* B *in* A *ad* B = A 2 *ad* B 2: ſed, *per hypotheſim*, A *ad* B = C *ad* D: ergo, *per axioma* 1. *ſecundæ partis*, A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per hypotheſim A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2: ſed, *per* 17. *theorematis corollarium*; etiam A *ad* B *in* A *ad* B = A 2 *ad* B 2, ergo, *per axioma* 6. *ſecundæ partis*, A *ad* B *in* A *ad* B = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, *per* 3. *axioma*, A *ad* B reſpectu C *ad* D = A *ad* B reſpectu A *ad* B: ſed A *ad* B = A *ad* B: ergo A *ad* B = C *ad* D. Quod erat ſecundum.

Theorema XIX.

SInt quæuis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo. A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3: ſi C *ad* D = A 2 *ad* B 2.

Dico ſecũdo. C *ad* D = A 2 *ad* B 2: ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3.

Theo-

Theorematis sensus est, rationem compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, esse triplicatam rationis A *ad* B: si ratio C *ad* D sit duplicata rationis A *ad* B. Atque vicissim, rationem C *ad* D, esse duplicatam rationis A *ad* B: si ratio composita ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, est triplicata rationis A *ad* B.

Demonstratur prima pars. Per 17. theorematis corollarium A *ad* B *in* A 2 *ad* B 2 = A *in* A 2 *ad* B *in* B 2 = A 3 *ad* B 3: sed per hypothesim C *ad* D = A 2 *ad* B 2: ergo, *per axioma* 1. *secundæ partis*, A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3: sed A 3 *ad* B 3 = A *in* A 2 *ad* B *in* B 2: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = A *in* A 2 *ad* B *in* B 2: ergo, *per axioma* 6. *secundæ partis*, A *ad* B *in* A 2 *ad* B 2 = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, *per* 3. *axioma*, A *ad* B respectu A *ad* B = C *ad* D respectu A 2 *ad* B 2: sed A *ad* B = A *ad* B: ergo C *ad* D = A 2 *ad* B 2. Quod erat secundum.

Theorema XX.

Int quævis duæ rationes A *ad* B & C *ad* D.

Dico primo. A *ad* F *per* A *ad* B = C *ad* D: & insuper A *ad* F *per* C *ad* D = A *ad* B: si B *ad* F = C *ad* D.

Dico secundo. B *ad* F = C *ad* D: si A *ad* F *per* C *ad* D = A *ad* B, vel A *ad* F *per* A *ad* B = C *ad* D.

Theorematis sensus est, rationem compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, diuidendo per vnam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, produci alteram, & vicissim, rationem illam, quæ diuisa per vnam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, producit alteram, esse compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D.

Demonstratur prima pars. Per 12. theorema A *ad* F *per* B *ad* F = A *ad* B, & insuper, A *ad* F *per* A *ad* B = B *ad* F: sed, *per hypothesim*, B *ad* F = C *ad* D: ergo, *per* 1. *&* 6. *axioma partis secundæ ideæ*, A *ad* F *per* C *ad* D = A *ad* B, & insuper A *ad* F *per* A *ad* B = C *ad* D. Quod erat primũ.

Demonstratur secunda pars. Posito quod A *ad* F *per* C *ad* D, = A *ad* B, quoniam per 12. theorema etiam A *ad* F *per* B *ad* F = A *ad* B, patet, *per* 6. *axioma partis secundæ ideæ*, A *ad* F *per* C *ad* D = A *ad* F *per* B *ad* F: ergo C *ad* D = B *ad* F. Rursus posito quod A *ad* F *per* A *ad* B = C *ad* D, quoniam per 12. theorema etiam A *ad* F *per* A *ad* B = B *ad* F: patet, *per* 6. *axioma partis secundæ ideæ*, C *ad* D = B *ad* F: igitur B *ad* F = C *ad* D: si A *ad* F *per* C *ad* D = A *ad* B, vel A *ad* F *per* A *ad* B = C *ad* D. Quod erat secundum.

Theo-

Theorema XXI.

Sint quæuis duæ rationes A *ad* B, & C *ad* D. Dico A *ad* B *per* C *ad* D = A *per* B *ad* C *per* D ♎ A *in* D *ad* C *in* B.

Constructio F *ad* B = C *ad* D.

Demonstratio. Per constructionem, F *ad* B = C *ad* D: ergo etiam, *per* 5 *theorema*, C *ad* F = D *ad* B; igitur *per* 20. *theorema*, A *ad* B *per* C *ad* D = A *ad* F: & insuper, *per* 11. *theorema*, A *per* B *ad* C *per* D = A *ad* F: ac denique, *per* 7. *theorema*, A *in* D *ad* C *in* B = A *ad* F ergo, *per* 6. *axioma*, *partis secundæ ideæ*, A *ad* B *per* C *ad* D = A *per* B *ad* C *per* D ♎ A *in* D *ad* C *in* B. Quod erat demonstrandum.

APPENDIX.

Proponuntur aliqua problemata vtilia pro operationibus Logisticis instituendis circa proportiones.

Vniuersales logisticas operationes instituere circa quaslibet quãtitates, docuimus cap. 2. lib. 1. logisticæ; & quoniam rationes siue proportiones omnes, quantitates sunt: præter illa quæ dicto capite docuimus, nihil planè requiritur, vt logisticæ operationes vniuersales instituantur circa rationes siue proportiones. Producta ex operationibus vniuersalibus, prolixiori scriptione expressa, satis commoda non sunt: huic incommodo oportunum remedium affertur libro primo logisticæ, quando producta, sunt quantitates absolutæ, siue diuersæ à rationibus: ad quem finem imprimis vtilia sunt quæ tradimus capite 3. & 4. prædicti libri primi; hæc tamen non sufficiunt, vt simile incommodum tollatur in productis ex operationibus vniuersalibus institutis circa proportiones; quamobrem hactenus traditæ nostræ doctrinæ de proportionibus, addo appendicem: in qua propono aliqua problemata, vtilia ad contrahenda producta ex vniuersalibus operationibus Logisticis, institutis circa proportiones; id enim videbatur requiri ad complementum doctrinæ nostræ de proportionibus, hactenus traditæ.

Problema I.

Datæ sint quæuis tres quantitates B, C, D.

Oporteat inuenire rationem B *ad* R, ita vt B *ad* R = C *ad* D.

Solutio. Inueniatur quantitas R, ita vt R = B *in* D *per* C; erit ratio B *ad* R illa quæ quæritur; atque B *ad* R = C *ad* D. De modo inueniendi quantitatem R ita vt R = B *in* D *per* C, plura hic non addo, etenim supposito quod litteræ B, C, D, singulæ repræsentent discretas quantitates, nihil requiritur nisi simplex regula aurea, obseruando signa † & —, vt docetur libro primo logisticæ. Si vero singulæ, litteræ B, C, D, vel ex ipsis aliquæ, non significent discretam quantitatem: poterunt pro istis quantitatibus quæ discretæ non sunt prius substitui quantitates discretæ, prioribus æquiualentes; quo facto, iterum vt prius per simplicem regulam auream habebitur intentum.

Exempli gratia. Posito quod C = 2. Item D = 4. Denique B = 6; tunc B *in* D *per* C = 12: atque adeo R = 12: & consequenter ratio 6 *ad* 12 = B *ad* R ≏ C *ad* D. Rursus supposito quod — C = — 2. Item D = 4. Denique B = 6; tunc B *in* D *per* — C = — 12: atque adeo inuenienda quantitas R, erit negatiua, hoc est — R: & — R = — 12: quare ratio 6 *ad* — 12 = B *ad* — R ≏ — C *ad* D: Præterea quia iuxta cap. 11. partis 2. huius ideæ, 6 *ad* — 12 = — 6 *ad* 12: etiam — 6 *ad* 12 = — B *ad* R ≏ — C *ad* D.

Demonstratio regulæ aureæ, atque adeo problematis hic propositi, satis patet, ex theoremate 3; significatione scriptionum logisticarum: & dictis cap. 11. partis secundæ logisticæ.

Problema II.

Datæ sint duæ rationes A *ad* B & C *ad* D: quæ solis signis † aut — connectantur.

Oporteat rationes illas ad vnam reuocare.

Solutio. Primo, per 1. problema, inueniatur quantitas R ita vt R *ad* B = C *ad* D. Secundo, termini A & R cum suis signis successiuè scripti, dabunt antecedentem terminum, quæsitæ rationis: cuius consequens terminus, erit B.

Exempli gratia supposito quod R *ad* B = C *ad* D; etiam A *ad* B † C *ad* D = A † R *ad* B. Item A *ad* B — C *ad* D = A — R *ad* B. Hinc 12 *ad* 4 † 6 *ad* 3 = 20 *ad* 4. Item 20 *ad* 6 † 3 *ad* 9 = 22 *ad* 6. Item 15 *ad* 4 — 6 *ad* 3 = 7 *ad* 4. Item 8 *ad* 2 — 3 *ad* 6 = 7 *ad* 2.

Demon-

Demonstratio huius problematis satis patet, ex secundo axiomate, & significatione logisticarum scriptionum.

Problema III.

DAtæ sint duæ rationes A *ad* B & C *ad* D: quæ particula *in* connectantur.

Oporteat rationes illas ad vnam reuocare.

Prima solutio. Per 1. problema, inueniatur quantitas, R ita vt B *ad* R = C *ad* D; ratio A *ad* R, erit illa quæ petitur.

Exempli gratia, supposito quod B *ad* R = C *ad* D; etiam A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* R. Item A *ad* B *in* — C *ad* D = A *ad* — R ≏ — A *ad* R. Item A *ad* B *in* — C *ad* — D = A *ad* R ≏ — A *ad* — R. Hinc 12 *ad* 4 *in* 6 *ad* 3 = 12 *ad* 2. Item 20 *ad* 2 *in* 3 *ad* 9 = 20 *ad* 6.

Secunda solutio. Per problema 3. capitis 3. libri 1. logisticæ, inueniantur quantitates E & F, ita vt A *in* C = E: item B *in* D = F; erit ratio E *ad* F, illa quæ petitur.

Exempli gratia supposito quod A *in* C = E: & insuper B *in* D = F: etiam A *ad* B *in* C *ad* D = E *ad* F; Item A *ad* B *in* — C *ad* D = E *ad* — F. Hinc 12 *ad* 4 *in* 6 *ad* 3 = 72 *ad* 12. Item 20 *ad* 2 *in* 3 *ad* 9 = 60 *ad* 18.

Demonstratio primæ solutionis, satis patet, ex 14 theoremate: & significatione Logisticarum scriptionum.

Demonstratio secundæ solutionis. Per 17. theorema, A *ad* B *in* C *ad* D = A *in* C *ad* B *in* D: atqui A *in* C *ad* B *in* D = E *ad* F, vt patet ex solutione: ergo A *ad* B *in* C *ad* D = E *ad* F.

Problema IV.

DAtæ sint duæ rationes A *ad* B & C *ad* D, quæ particula *per* connectantur.

Oporteat rationes illas ad vnam reuocare.

Prima solutio. Per problema primum, inueniatur quantitas R: ita vt, R *ad* B = C *ad* D; ratio A *ad* R, erit illa quæ petitur.

Exempli gratia. supposito, quod R *ad* B = C *ad* D: etiam A *ad* B *per* C *ad* D = A *ad* R. Item A *ad* B *per* — C *ad* D = A *ad* — R ≏ — A *ad* R. Item A *ad* B *per* — C *ad* — D = A *ad* R. Hinc 12 *ad* 4 *per* 6 *ad* 3 = 12 *ad* 8. Item 20 *ad* 2 *per* 3 *ad* 9 = 20 *ad* 6 *per* 9.

Secunda solutio. Per Problema 4. capitis 3. libri 1. Logisticæ; inueniantur quantitates H & K, ita vt, A *per* B = H: item C *per* D = K; erit ratio H *ad* K, illa quæ petitur.

Exempli gratia: ſuppoſito quod A *per* B = H: & etiam C *per* D = K; tunc A *ad* B *per* C *ad* D = H *ad* K. Hinc 12 *ad* 4 *per* 6 *ad* 3 = 3 *ad* 2. Item 20 *ad* 2 *per* 3 *ad* 9 = 10 *ad* 3 *per* 9 ≏ 10 *ad* 1 *per* 3.

Tertia ſolutio. Per Problema 3. capitis 3. libri 1. Logiſticæ inueniantur quantitates X & Z: ita vt, A *in* D = X: item C *in* B = Z; erit ratio X *ad* Z illa quæ petitur.

Exempli gratia; ſuppoſito quod A *in* D = X: & etiam C *in* B = Z: tunc A *ad* B *per* C *ad* D = X *ad* Z. Hinc 12 *ad* 4 *per* 6 *ad* 3 = 36 *ad* 24. item 20 *ad* 2 *per* 3 *ad* 9 = 180 *ad* 6.

Demonſtratio primæ ſolutionis, ſatis patet ex theoremate 20. Ex prima ſolutione, & theoremate 21. immediate patent reliquæ duæ ſolutiones.

Problema V.

Data ſit quæuis ratio A *ad* B.

Oporteat propoſitam eius radicem inuenire.

Nota. Suppoſito quod littera F ſignificet quantitatem abſolutam, quodque E *in* E = F: tunc R 1 * F = E. Verum ſi E *in* E *in* E = F: tunc R 2 * F = E; atque ita de cæteris, vt patet ex dictis libro primo Logiſticæ. Similiter ſuppoſito quod A *ad* C *in* A *ad* C = A *ad* B: tunc R 1 * A *ad* B = A *ad* C. Item ſi A *ad* C *in* A *ad* C *in* A *ad* C = A *ad* B; tunc R 2 * A *ad* B = A *ad* C; & ita de cæteris, vt diximus capite 6. ſecundæ partis Ideæ, atque hic iterum putaui monendum. Hoc prænotato.

Solutio. Pro antecedente termino rationis quæſitæ ſcribatur numerus radicalis, habens denominatorem rationis, quæ petitur: atque poſt aſteriſmum ſcriptum habeat antecedentem terminum datæ rationis. Similiter pro conſequente termino quæſitæ rationis, ſcribatur numerus radicalis, habens denominatorem quæſitæ rationis: atque poſt aſteriſmum ſcriptum habeat conſequentem terminum datæ rationis, ſic enim habebitur ratio quæ petitur.

Exempli gratia R 1 * A *ad* B = R 1 * A *ad* R 1 * B. Item R 2 * A *ad* B = R 2 * A *ad* R 2 * B. Item R 3 * A *ad* B = R 3 * A *ad* R 3 * B.

Non erit inutile hic reflectere, quo ad ſubſtantiam rei, idem eſſe, inuenire R 1 * A *ad* B, & inuenire mediam proportionalem inter A & B. Item inuenire R 2 * A *ad* B, idem eſſe, ac inuenire vnam ex duabus medijs proportionalibus, inter A & B; quare poſito quod A *ad* C = C *ad* B, etiã R 1 * A *ad* B = A *ad* C. Rurſus poſito quod A *ad* C = C *ad* D ≏ D *ad* B: etiam R 2 * A *ad* B = A *ad* C ≏ D *ad* B. Hinc

fit,

fit, quod difficultas inueniendi,datæ rationis radicem propositam,eadem fere fit, cum difficultate inueniendi propositam radicem datæ quantitatis absolutæ: vel etiam fit eadem cum difficultate inueniendi quotlibet medias proportionales, inter duas datas quantitates absolutas; quare difficultas, quæ hic remanet circa radices proportionum, euanescet, quando superata erit difficultas, circa inuentionem mediarum proportionalium: aut radicum quantitatum absolutarum.

Problema VI.

Proposita sit aliqua æquatio, consistens inter rationes: Oporteat ex vna æquationis parte, transferre aliquam rationem, ad partem oppositam, non vitiando æquationem.

Nota. Quod hic petitur circa æquationes consistentes inter rationes, non differt ab eo quod cap. 4. lib. 1. Logisticæ, docetur, circa æquationes consistentes inter quantitates absolutas, atque Antithesis appellatur: quam hic docemus adhibere circa rationes.

Solutio. In ratione quæ transfertur ad oppositam partem æquationis, antecedentis termini signum, mutetur in signum oppositum: sic enim non vitiabitur æquatio.

Exempli gratia, supposito, quod 8 *ad* 2 † 6 *ad* 3 = 15 *ad* 3 † 4 *ad* 4: per Antithesim etiam 8 *ad* 2 = 15 *ad* 3 † 4 *ad* 4 — 6 *ad* 3. Item 8 *ad* 2 † 6 *ad* 3 — 15 *ad* 3 = 4 *ad* 4.

Demonstratio huis problematis, satis manifesta est, ex dictis cap. 8. partis secundæ; atque intelligentia scriptionum Logisticarum.



IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS QVINTA.

ARGVMENTVM.

SVppositis sex principijs, siue axiomatibus hypotheticis, capitis 13 secundæ partis Ideæ: (ex quibus immediate patet lemma quod claritatis gratia præmittimus) afferuntur, & demonstrantur sex propositiones: nimirum tria theoremata, atque totidem problemata. Hæ propositiones singulæ vniuersales sunt: immo sunt propositiones Euclideæ, sed euectæ, ad maiorem vel maximam vniuersalitatem. Vt propositionum vsus amplissimus, atque maxima vtilitas, melius intelligatur: iuuabunt nota capitis secundi, atque exercitatio Logistica tertij capitis, in qua, ex propositionibus primi capitis, propemodum immediatè deducuntur, quam plurimæ ex præcipuis propositionibus Euclidis, atque Archimedis.

CAPVT I.

Proponuntur tria theoremata, & totidem problemata vniuersalia, ex theorematibus deducta.

Lemma.



Qvalescunque quantitates sint A & C.

Dico primo. A *in* C ductu primæ classis, *ad* A *in* C ductu secundæ classis = 2 *ad* 1.

Dico secundo. A *in* C ductu primæ classis, *ad* A *in* C, ductu tertiæ classis = 3 *ad* 1.

Dico tertio. A *in* C ductu primæ classis, *ad* A *in* C ductu quartæ classis = A *ad* F. Supposito quod littera F significet sinum arcus A: quando A significat arcum circuli. Vel certe littera F significet duas

tertias

tertias partes quadrati facti supra radium quadrantis A : quando A significat quadrantem circuli.

Singulæ assertiones, immediatè patent ex axiomatibus hypotheticis propositis capite 13. secundæ partis ideæ: dummodo intelligantur quæ de ductibus, & ductuum classibus, dicta sunt, capite 3 & 4 secundæ partis ideæ.

Quoniam per ductuum proportionem, intelligimus proportionem, quam habent producta ex ipsis ductibus, suppositis semper genitoribus æqualibus, vel æquiualentibus: primæ assertionis sensus est, ductum primæ classis, ad ductum secundæ classis, habere proportionem, quam 2 habet ad 1, secundæ assertionis sensus est, ductum primæ classis, ad ductum tertiæ classis, habere proportionem, quam 3 habet ad 1. Tertiæ assertionis sensus est, ductum primæ classis, ad ductum quartæ classis, habere proportionem, quam habet inferior genitor, ad quantitatem F: supposito quod littera F, significet sinum inferioris genitoris, quando inferior genitor est arcus circuli. Vel certe littera F, significet duas tertias partes quadrati facti supra radium inferioris genitoris, quando inferior genitor significat quadrantem circuli.

Theorema I.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D, atque A *in* C aliquo ductu nominato = X: item B *in* D ductu eiusdem classis = Z.

Dico primo. X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D.

Dico secundo. X *ad* Z = A *ad* B, si C = D: atque viciſſim C = D, si X *ad* Z = A *ad* B.

Dico tertio. X *ad* Z = C *ad* D, si A = B: atque viciſſim A = B, si X *ad* Z = C *ad* D.

Dico quarto. X = Z, si A *ad* B = D *ad* C: & viciſſim A *ad* B = D *ad* C, si X = Z.

Dico quinto. X *ad* Z = A 2 *ad* B 2, si A *ad* B = C *ad* D: & viciſſim A *ad* B = C *ad* D, si X *ad* Z = A 2 *ad* B 2.

Dico sexto. X *ad* Z = A 3 *ad* B 3, si C *ad* D = A 2 *ad* B 2: & viciſſim C *ad* D = A 2 *ad* B 2, si X *ad* Z = A 3 *ad* B 3.

Theorematis sensus declaratur in nota secunda capitis subsequẽtis.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim, A *in* C aliquo ductu nominato = X: & insuper B *in* D ductu eiusdem classis = Z: ergo, X *ad* Z = A *in* C aliquo ductu nominato, *ad* B *in* D ductu eiusdem classis: atqui, *per 6 axioma hypotheticum*, A *in* C aliquo ductu nominato, *ad* B *in* D ductu eiusdem classis = A *in* C *ad* B *in* D: ergo, X

ad

ad Z = A *in* C *ad* B *in* D: ſed, *per* 17 *theorema quartæ partis*, A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D. Quod erat primum.

Demonſtratur ſecunda pars. Per thorema 15 quartæ partis ideæ, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B, ſi C = D:& viciſſim C = D, ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B: atqui: *per primam partem*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo X *ad* Z = A *ad* B, ſi C = D: & viciſſim C = D, ſi X *ad* Z = A *ad* B. Quod erat ſecundum.

Demonſtratur tertia pars. Per theorema 15 quartæ partis ideæ, A *ad* B *in* C *ad* D = C *ad* D, ſi A = B: & viciſſim A = B, ſi A *ad* B *in* C *ad* D = C *ad* D: ſed, *per primam partem*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, X *ad* Z = C *ad* D, ſi A = B: & viciſſim, A = B, ſi X *ad* Z = C *ad* D. Quod erat tertium.

Demonſtratur quarta pars. Per 16 theorema quartæ partis ideæ, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A, ſi A *ad* B = D *ad* C: & viciſſim, A *ad* B = D *ad* C, ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* A: ſed, *per primam partem*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo X *ad* Z = A *ad* A, adeoque X = Z, ſi A *ad* B = D *ad* C: & viciſſim, A *ad* B = D *ad* C, ſi X *ad* Z = A *ad* A: hoc eſt, ſi X = Z. Quod erat quartum.

Demonſtratur quinta pars. Per theorema 18 quartæ partis ideæ, A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2, ſi A *ad* B = C *ad* D: & viciſſim, A *ad* B = C *ad* D, ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A 2 *ad* B 2: ſed, *per primam partem*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo X *ad* Z = A 2 *ad* B 2, ſi A *ad* B = C *ad* D: & viciſſim A *ad* B = C *ad* D, ſi X *ad* Z = A 2 *ad* B 2. Quod erat quintum.

Demonſtratur ſexta pars. Per theorema 19 quartæ partis ideæ, A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3, ſi C *ad* D = A 2 *ad* B 2; & viciſſim, C *ad* D = A 2 *ad* B 2, ſi A *ad* B *in* C *ad* D = A 3 *ad* B 3: ſed, *per primam partem*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, X *ad* Z = A 3 *ad* B 3, ſi C *ad* D = A 2 *ad* B 2: & viciſſim C *ad* D = A 2 *ad* B 2, ſi X *ad* Z = A 3 *ad* B 3. Quod erat ſextum.

Theorema II.

Qvantitas X, genita ſit ex A *in* C, ductu primæ claſſis: & quantitas Z, genita ſit ex B *in* D, aliquo ductu, ſecundæ, tertiæ, aut quartæ claſſis. Denique R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D.

Dico primo. X *ad* Z = R *ad* 3 ♎ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 3 ♎ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 3: ſuppoſito tamen, quod quantitas Z, genita ſit ex B *in* D ductu ſecundæ claſſis.

Dico

Dico secundo. X *ad* Z = R *ad* 2 ≏ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 2 ≏ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 2: supposito tamen, quod quantitas Z, genita sit ex B *in* D ductu tertiæ classis.

Dico tertio. X *ad* Z = R *ad* K ≏ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* K ≏ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* K. Supposito tamen, quod quantitas Z, genita sit ex B *in* D ductu quartæ classis: quodque littera F, significet sinum arcus B, quando littera B significat arcum: vel littera F, significet duas tertias partes quadrati facti supra radium quadrantis B, quando littera B significat quadrantem circuli; ac denique quod 6 *ad* K = B *ad* F.

Theorematis sensus exponitur in nota tertia capitis subsequentis.

Constructio. B *in* D ductu primæ classis = P.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim, A *in* C ductu primæ classis = X: sed, *per constructionem*, B *in* D ductu primæ classis = P: ergo, *per primum theorema*, X *ad* P = A *ad* B *in* C *ad* D: atqui, *per hypothesim*, A *ad* B *in* C *ad* D = R *ad* 6: ergo X *ad* P = R *ad* 6. Rursus, per constructionem, B *in* D ductu primæ classis = P: sed, *per hypothesim*, B *in* D ductu secundæ classis = Z: ergo, *per lemma*, P *ad* Z = 6 *ad* 3; quoniam igitur, X *ad* P = R *ad* 6, & insuper P *ad* Z = 6 *ad* 3, etiam *per* 6 *theorema quartæ partis ideæ*, X *ad* Z = R *ad* 3: sed, *per* 12 *theorema quartæ partis ideæ*, etiam R *ad* 3 = R *ad* 6 *in* 6 *ad* 3: ergo X *ad* Z = R *ad* 6 *in* 6 *ad* 3: sed quoniam, *per hypothesim*, R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D, etiam R *ad* 6 *in* 6 *ad* 3 = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 3: ergo X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 3: atqui etiam, *per* 17 *theorema quartæ partis ideæ*, A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 3 = A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 3: ergo X *ad* Z = A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 3; patet igitur X *ad* Z = R *ad* 3 ≏ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 3 ≏ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 3. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim A *in* C ductu primæ classis = X: sed, *per constructionem*, B *in* D ductu primæ classis = P: ergo, *per primum theorema*, X *ad* P = A *ad* B *in* C *ad* D: atqui, *per hypothesim*, A *ad* B *in* C *ad* D = R *ad* 6: ergo X *ad* P = R *ad* 6. Rursus, *per constructionem*, B *in* D ductu primæ classis = P: sed, *per hypothesim*, B *in* D ductu tertiæ classis = Z: ergo, *per* 3 *axioma hypotheticum*, P *ad* Z = 6 *ad* 2; quoniam igitur, X *ad* P = R *ad* 6, & insuper P *ad* Z = 6 *ad* 2, etiam, *per* 6 *theorema quartæ partis ideæ*, X *ad* Z = R *ad* 2: sed, *per* 12 *theorema quartæ partis ideæ*, etiam R *ad* 2 = R *ad* 6 *in* 6 *ad* 2: ergo, X *ad* Z = R *ad* 6 *in* 6 *ad* 2: sed quoniam, *per hypothesim*, R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D, etiam R *ad* 6 *in* 6 *ad* 2 = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 2: ergo X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 2: atqui etiam, *per* 17 *theorema quartæ partis ideæ*, A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 2

= A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 2: patet igitur, X *ad* Z = R *ad* 2 ≏ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* 2 ≏ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* 2. Quod erat ſecundū.

Demonſtratur tertia pars. Per hypotheſim, A *in* C ductu primæ claſſis = X: ſed *per conſtructionem*, B *in* D ductu primæ claſſis = P: ergo *per primum theorema* X *ad* P = A *ad* B *in* C *ad* D: atqui *per hypotheſim*, A *ad* B *in* C *ad* D = R *ad* 6: ergo X *ad* P = R *ad* 6. Rurſus, *per conſtructionem*, B *in* D ductu primæ claſſis = P: ſed, *per hypotheſim*, B *in* D ductu quartæ claſſis = Z: ergo, *per hypotheſim, & lemma*, P *ad* Z = 6 *ad* K; quoniam igitur X *ad* P = R *ad* 6, & inſuper P *ad* Z = 6 *ad* K: etiam, *per* 6 *theorema quartæ partis ideæ*, X *ad* Z = R *ad* K. ſed *per* 12 *theorema quartæ partis ideæ*, etiam R *ad* K = R *ad* 6 *in* 6 *ad* K: ergo, X *ad* Z = R *ad* 6 *in* 6 *ad* K: ſed quoniam, *per hypotheſim*, R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D, etiam R *ad* 6 *in* 6 *ad* K = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* K: ergo X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* K: atqui, *per theorema* 17 *quartæ partis ideæ*, A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* K = A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* K: ergo X *ad* Z = A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* K; patet igitur, X *ad* Z = R *ad* K ≏ A *ad* B *in* C *ad* D *in* 6 *ad* K ≏ A *in* C *in* 6 *ad* B *in* D *in* K. Quod erat tertium.

Theorema III.

QVantitas X, genita ſit ex A *in* C aliquo ductu cuiuſuis claſſis: & etiam quantitas Z, genita ſit ex B *in* D aliquo ductu cuiuſuis claſſis. Præterea A *in* C ductu ex quo oritur X, *ad* A *in* C ductu primæ claſſis = R *ad* E; item A *in* C ductu primæ claſſis, *ad* B *in* D ductu primæ claſſis = E *ad* F. Denique B *in* D ductu primæ claſſis *ad* B *in* D ductu ex quo oritur Z = F *ad* K.

Dico X *ad* Z = R *ad* K ≏ R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K ≏ R *in* A *in* C *in* F *ad* E *in* B *in* D *in* K.

Theorematis ſenſus exponitur in nota 4. capitis ſequentis.

Demonſtratio. A *in* C ductu ex quo oritur X = X: ergo, *per theorema* 2 *quartæ partis ideę*, A *in* C ductu ex quo oritur X *ad* A *in* C ductu primę claſſis = X *ad* A *in* C ductu primæ claſſis: ſed, *per hypotheſim*, A *in* C ductu ex quo oritur X *ad* A *in* C ductu primæ claſſis = R *ad* E: ergo, X *ad* A *in* C ductu primæ claſſis = R *ad* E: ſed etiam, *per hypotheſim* A *in* C ductu primæ claſſis *ad* B *in* D ductu primæ claſſis = E *ad* F: ergo, *per* 6 *theorema quartæ partis ideę, ex ęquo*, X *ad* B *in* D ductu primæ claſſis = R *ad* F. Rurſus B *in* D ductu ex quo oritur Z = Z: ergo, *per theorema* 2 *quartę partis ideę*, B *in* D ductu primæ claſſis *ad* B *in* D ductu ex quo oritur Z = B *in* D ductu primæ claſſis *ad* Z: ſed, *per hypotheſim*, B *in* D ductu primæ claſſis *ad* B *in* D ductu ex quo oritur Z

= F *ad*

= F *ad* K: ergo B *in* D ductu primæ classis *ad* Z = F *ad* K; quoniam igitur, X *ad* B *in* D ductu primę classis = R *ad* F, & insuper B *in* D ductu primæ classis *ad* Z = F *ad* K: etiam, *per theorema 6. partis quartæ ideę, ex æquo*, X *ad* Z = R *ad* K. Denique, *per hypothesim* A *in* C *ad* B *in* D = E *ad* F: sed, *per 17. theorema, quartę partis ideę*, A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, E *ad* F = A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, R *ad* E *in* E *ad* F = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D: sed, *per theorema 12. quartæ partis ideę*, R *ad* F = R *ad* E *in* E *ad* F: ergo, R *ad* F = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D: ergo, R *ad* F *in* F *ad* K = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K: sed *per* 12 *theorema, partis quartę ideę*, R *ad* K = R *ad* F *in* F *ad* K: ergo R *ad* K = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K: ≏ R *in* A *in* C *in* F *ad* E *in* B *in* D *in* K *vt patet ex theoremate* 17 *quartæ partis ideæ*. Constat igitur, X *ad* Z = R *ad* K ≏ R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K ≏ R *in* A *in* C *in* F *ad* E *in* B *in* D *in* K. Quod erat demonstrandum.

Problema I.

Sint duæ quantitates X & Z: atque quantitas X, producatur ex A *in* C aliquo ductu nominato; item quantitas Z producatur ex B *in* D ductu eiusdem classis, cum ductu ex quo producitur quantitas X, denique cogniti sint genitores A, B, C, D.

Oporteat inuenire proportionem, quam quantitas X, habet ad quantitatem Z.

Prima solutio. Per Problema primum Appendicis quartæ partis ideæ, inueniatur quantitas F, ita vt C *ad* D = B *ad* F. Proportio A *ad* F, erit illa quæ petitur; hoc est X *ad* Z = A *ad* F.

Secunda solutio. Ponatur subsequens scriptio Logistica, A *ad* D *in* B *per* C; hæc scriptio, in terminis cognitis, exhibebit rationem quæsitam: hoc est, X *ad* Z = A *ad* D *in* B *per* C.

Demonstratur prima solutio. Per hypothesim, A *in* C aliquo ductu = X: & insuper B *in* D ductu eiusdem classis = Z; ergo, *per* 1. *theorema*, X *ad* Z = A *ad* B *in* C *ad* D; atqui, *per* 14. *theorema partis quartæ ideæ*, A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* F: ergo X *ad* Z = A *ad* F.

Demonstratur secunda solutio. Per hypothesim A *in* C aliquo ductu nominato = X: & insuper B *in* D ductu eiusdem classis = Z: ergo, *per 6 axioma hypotheticum partis secundæ ideæ*, X *ad* Z = A *in* C *ad* B *in* D: ergo, supposito quod B *ad* F = C *ad* D, *per 7 theorema quartæ partis ideæ*, X *ad* Z = A *ad* F: & præterea, *per 8 theorema quartæ partis ideæ*, F = D *in* B *per* C: ergo, *per 2 theorema quartæ partis ideæ*, X *ad* Z = A *ad* D *in* B *per* C.

Problema II.

SInt duæ quantitates X & Z: atque quantitas X, producatur ex A *in* C ductu primæ classis: & quantitas Z, producatur ex B *in* D ductu alterius classis; denique cogniti sint genitores A, B, C, D.

Oporteat inuenire proportionem, quantitatis X ad quantitatem Z.

Claritatis gratia, distinguo tres casus diuersos. Primus casus fit, quando quantitas Z, producitur ex ductu secundæ classis. Secundus casus fit, quando quantitas Z, producitur ex ductu tertiæ classis. Tertius casus fit, quando quantitas Z, producitur ex ductu quartæ classis.

Solutio problematis, in primo & secundo casu. Per problema 3. Appendicis partis quartæ ideæ, inueniatur quantitas R, ita vt, R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D; in primo casu, X *ad* Z = R *ad* 3. In secundo casu, X *ad* Z = R *ad* 2.

Solutio problematis in tertio casu. Primo assumatur littera F, vt significet sinum arcus B, quando littera B significat arcum: vel vt significet duas tertias partes quadrati facti supra radium quadrantis B, quando littera B significat quadrantem circuli. Secundo, per problema primum Appendicis quartæ partis ideæ, inueniatur quantitas K, ita vt, 6 *ad* K = B *ad* F. Tertio, per problema 3 Appendicis quartæ partis ideæ, inueniatur quantitas R, ita vt, R *ad* 6 = A *ad* B *in* C *ad* D; erit proportio R *ad* K, illa quæ quæritur: hoc est X *ad* Z = R *ad* K.

Demonstratio, problematis, immediatè patet, ex ijs, quæ in solutione præscribuntur, & theoremate secundo.

Circa solutionem tertij casus, notandum, quod ex ijs quæ in problemate cognita supponuntur, etiam cognita reddatur quantitas R; verum, ex his cognitam redere quantitatem K, non minorem difficultatem habet, quam circuli quadratura, quæ hactenus à nemine inuenta est, in rigore Geometrico; hæc tamen practicè soluta est; & sic etiam, ex ijs quæ in problemate cognita supponuntur, practicè innotescit quantitas K, atque proportio R *ad* K, cui æquatur proportio X *ad* Z. Denique licet hactenus in Mathesi desideretur, modus, inueniendi duos numeros, aut duas rectas lineas, aut duas quadratas superficies, quæ habeant eamdem proportionem, quam circumferentia circuli habet ad radium eiusdem circuli: aut arcus circuli habet ad suum sinum: aut totus circulus habet ad quadratum factum supra radium eiusdem circuli; tamen etiam in tertio casu non male satisfacimus proposito problemati, assignando duas quantitates eiusdem gene-

generis cum duobus genitoribus quantitatum X & Z, quæ in omni rigore habeant eamdem proportionem, quam habent quantitates X & Z.

Problema III.

Sint duæ quantitates X & Z: atque quantitas X, producatur ex A *in* C quouis ductu nominato; & etiam quantitas Z, producatur ex B *in* D quouis ductu nominato. Denique cogniti sint genitores A, B, C, D.

Oporteat inuenire proportionem, quantitatis X ad quantitatem Z.

Solutio. Primo per secundum problema inueniatur ratio R *ad* E, ita vt, R *ad* E = X *ad* A *in* C ductu primæ classis: item ratio F *ad* K, ita vt, ratio F *ad* K = B *in* D ductu primæ classis *ad* Z. Secundo, per problema 3 Appendicis quartæ partis ideæ, inueniatur ratio G *ad* H, ita vt, G *ad* H = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K; erit ratio G *ad* H, illa quæ quæritur: hoc est, G *ad* H = X *ad* Z.

Demonstratio problematis, immediate patet, ex ijs quæ in solutione præscribuntur, & theoremate tertio; etenim ex hypothesi theorematis tertij, & solutione tertij problematis, patet, vtrobique easdem esse rationes R *ad* E, item A *ad* B, item C *ad* D, item F *ad* K: quandoquidem igitur, *per 3 theorema*, X *ad* Z = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K: atque etiam, *ex solutione problematis*, constet, G *ad* H = R *ad* E *in* A *ad* B *in* C *ad* D *in* F *ad* K: patet, X *ad* Z = G *ad* H; vt asseritur in solutione problematis.

CAPVT II.

Notanda circa propositiones capite primo propositas.

Nota primo. Producta ex ductibus, difficilius cognoscuntur, quam genitores ex quibus oriuntur talia producta: vt igitur à facilioribus gradus fiat ad illa quæ difficiliora sunt, docetur, quomodo proportio duarum quantitatum genitarum ex ductibus nominatis, connexa sit cum rationibus genitorum, atque ex genitorum rationibus, quantitatum genitarum ratio inferatur; in quē finem, considero tres casus diuersos. Primus est, quando singulæ quantitates X & Z generantur ex ductu eiusdem classis. Secundus casus est, quando

quan-

quantitas X generatur ex ductu primæ classis, & quantitas Z generatur ex ductu secundæ, tertiæ, aut quartæ classis. Tertius casus est quando vtraque quantitas X & Z generatur ex ductu diuerso à ductu primæ classis.

Nota secundo. In primo theoremate, tantum agi de primo casu proposito in prima nota: & facta hac hypothesi, in prima huius theorematis assertione dicitur, quod quantitas X ad quantitatem Z, semper habeat rationem compositam ex rationibus quam habēt genitores: hoc est rationem compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D, supposito quod A & C sint genitores quantitatis X, quodque B & D sint genitores quantitatis Z; etenim prima assertio affirmans quod X *ad* Z ⩵ A *ad* B *in* C *ad* D, idem plane significat, ac si diceretur, rationem quantitatis X ad quantitatem Z, esse æqualem rationi compositæ ex rationibus A *ad* B & C *ad* D. Posita hac veritate magis vniuersali, in assertionibus quæ primam subsequuntur, determinatur, quandonam ratio composita ex genitoribus quantitatum X & Z, atque adeo ratio quantitatis X ad quantitatem Z, sit æqualis rationi quam habent inferiores genitores, nimirum A *ad* B: vel quando sit æqualis rationi quam habent superiores genitores, nimirum C *ad* D: item quando ratio quantitatis X ad quantitatem Z, sit ratio æqualitatis: vel ratio duplicata, aut triplicata duorum genitorum.

Itaque primæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, semper habere rationem compositam ex ratione inferioris genitoris A ad inferiorem genitorem B, & ratione superioris genitoris C ad superiorem genitorem D. Secundæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, habere eamdem rationem quam habet inferior genitor A ad inferiorem genitorem B, in omni & solo casu, in quo superior genitor C, æquatur superiori genitori D. Tertiæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, habere eamdem rationem, quam habet superior genitor C ad superiorem genitorem D, in omni & solo casu; in quo inferior genitor A, æquatur inferiori genitori B. Quartæ assertionis sensus est, quantitatem X æquari quantitati Z, in omni & solo casu, in quo habent genitores reciproce proportionales. Quintæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, habere duplicatam rationem duorum superiorum, aut inferiorum genitorum, in omni & solo casu, in quo habent genitores proportionales. Sextæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, habere triplicatam rationem duorum superiorum, aut inferiorum genitorum, in omni & solo casu, in quo reliqui duo genitores habent duplicatam rationem, eorumdem illorum superiorum, aut inferiorum genitorum.

Nota

Nota tertio. Ex casibus propositis in prima nota, solus secundus casus consideratur in secundo theoremate: atque facta hac hypothesi, docetur, quantitatem X ad quantitatem Z, habere rationem compositam ex tribus rationibus: nimitum ex rationibus quam habent genitores quantitatum X & Z, atque ex ratione quam habet ductus primæ classis, ad ductum illius classis quo producitur quantitas Z. Quoniam vero in hypothesi quæ hic consideratur, quantitas Z produci potest, vel ex ductu secundæ classis, vel ex ductu tertiæ classis, vel denique ex ductu quartæ classis: triplici huic diuersæ circumstantiæ, respondet triplex assertio.

In hoc secundo theoremate facta prius hypothesi, quod quantitatis X genitores sint A & C, atque quantitatis Z genitores sint B & D: primæ assertionis sensus est, rationem quantitatis X ad quantitatem Z, esse compositam ex rationibus genitorum, hoc est A *ad* B & C *ad* D: atque ex ratione ductus primæ classis, ad ductum secundæ classis: supposito quod quantitas Z producatur ductu secundæ classis. Secundæ assertionis sensus est, rationem quantitatis X ad quantitatem Z, esse compositam ex rationibus genitorum hoc est A *ad* B & C *ad* D: atque ex ratione ductus primæ classis ad ductum tertiæ classis: supposito quod quantitas Z producatur ductu tertiæ classis. Tertiæ assertionis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z habere rationem compositam ex rationibus genitorum, hoc est A *ad* B & C *ad* D: atque ex ratione ductus primæ classis, ad ductum quartæ classis: supposito quod quantitas Z producatur ductu quartæ classis. Hinc satis patet tribus assertionibus secundi theorematis, solum doceri, quod initio huius notæ diximus: nimirum, in secundo casu primæ notæ, quantitatem X ad quantitatem Z, habere rationem compositam ex tribus rationibus, quarum duæ sint, rationes quam habent genitores quantitatum X & Z: tertia sit, ratio quam habet ductus primæ classis, ad ductum illius classis quo producitur quantitas Z.

Nota quarto. Ex casibus in prima nota propositis omnes simul considerantur in tertio theoremate: atque adeo tertium theorema, aliquo modo amplectitur, primum & secundum theorema. Existimaui tamen priora duo theoremata prætermittenda non esse, quia videbantur vtilia, & commoda, licet nullo modo essent necessaria.

Posito quod quantitatis X genitores sint A & C; & quantitatis Z genitores sint B & D; tertij theorematis sensus est, quantitatem X ad quantitatem Z, habere rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum duæ sint rationes genitorum nimirum rationes A *ad* B & C *ad* D: atque ex reliquis duabus rationibus, vna sit, ratio quam habet ductus ex quo producitur quantitas X, ad ductum primæ classis: altera

tera ratio sit illa, quam habet ductus primæ classis ad ductum ex quo producitur quantitas Z. Ex his quatuor rationibus componentibus rationem quantitatis X ad quantitatem Z, duę habentur ex ipsis genitoribus, qui si cogniti sint, etiam hæ duæ rationes cognoscuntur; aliæ duę rationes componentes habentur ex axiomatibus hypotheticis propositis capite 13 secundæ partis ideæ, vel potius ex lemmate proposito initio primi capitis huius partis ideæ.

Nota quinto. Si methodo ab Euclide vsitata, tantummodo proponendæ forent veritates, siue tituli propositionum, quas amplectuntur tria theoremata superiori capite proposita: oporteret volumen scribere, maius libris omnibus ab Euclide conscriptis. Si tibi, amice lector, incredibile videatur, quod hic assero, ac noto: vel vniuersalium nostrorum theorematum sensum non intellexisti, vel parum versatus es in doctrinis Euclideis. Methodo ab Euclide vsitata, numerorum, superficierum, corporumque species diuersæ, comparantur inter se: atque separatim inquiritur, quam proportionem habeat vna species ad alteram eodem genere contentam. Exempli gratia separatim inquiritur quam proportionem habeat, parallelogrammum ad parallelogrammum. Item triangulum ad triangulum. Item parallelogrammum ad triangulum. Immo hæ quantitatum species, vlterius subdiuisæ, separatim inter se comparantur. Sic libro primo propositione 35 & 36 tantum inter se comparantur parallelogramma quæ habent bases, & altitudines æquales. Rursus eodem libro propositione 37 & 38 tantum inter se comparantur triangula, quæ habent bases, & altitudines æquales. Deinde libro primo propositione 41 inter se comparantur parallelogramma, & triangula quæ habent bases, & altitudines æquales. Post hæc libro sexto propositione prima inter se comparantur, aut duo parallelogramma, aut duo triangula, quæ habent altitudines æquales. Hactenus enumeratis sex diuersis propositionibus, necdum absoluta est, parallelogrammorum, triangulorumque comparatio, quæ ab angulis non dependet: atque adeo in methodo Euclidea, plus quam sex diuersæ propositiones impenduntur, vt absoluatur comparatio vnius binarij duarum quantitatum specie differentium, qualem binarium constituit parallelogrammum, & triangulum. Simili modo, in Euclidea methodo, inter se comparantur numerorum, superficierum, corporumque species diuersæ: atque huiusmodi quantitatum proportiones inuestigantur; in qua methodo manifestum est, longe plures diuersas propositiones requiri, quam sint possibiles binarij quantitatum specie differentium, atque eodem genere contentarum, quarum consideratio ad Mathesim spectet. Igitur vt methodo Euclidea proponantur veritates, quas amplectuntur tria superio-

perioris capitis theoremata: necessariæ forent longe plures propositiones, quam sint possibiles binarij quantitatum specie differentium, de quibus agunt prædicta nostra theoremata: atqui hæc nostra theoremata, agunt de omnibus, & singulis quantitatibus, quæ vnico ductu nominato producuntur: ergo vt methodo Euclidea proponantur veritates quas amplectuntur tria superioris capitis theoremata, necessariæ forent, longe plures propositiones, quam sint possibiles binarij quantitatum diuersæ speciei, quæ singulæ producuntur vnico ductu nominato.

Stabilita hac veritate, consule si placet caput 2. partis secundæ huius ideæ: ex quo capite intelliges, quæ sint quantitates diuersæ speciei, quæ vnico ductu nominato producantur: & facile in vnum colliges, subsequentes species diuersarum quantitatum, quæ omnes spectent ad idem quintum genus quantitatum atque superficies sunt. Parallelogramma plana. Parallelogramma curua. Triangula plana. Triangula curua. Circuli. Sectores circulorum. Rectorum cylindrorum curua superficies. Rectarum pyramidum curua superficies. Sphærarum superficies. Superficies sphæricæ terminatæ vnica linea circulari. Superficies sphæricæ terminatæ duabus lineis circularibus, atque inter se parallelis. Tot superficies curuæ atque inter se specie diuersæ, quot dari possunt superficies planæ curua linea terminatæ, atque specie diuersæ. His superficiebus specie differentibus, quæ singulæ vnico ductu nominato producuntur, addi possunt numeri omnes specie differentes, atque ex vno ductu producibiles; præterea corpora, vt sunt parallelepipeda, cylindri, prismata, pyramides, coni, sphæræ, & reliqua corpora vnico ductu nominato producibilia; ac denique singulæ cuiuscunque generis quantitates vnico ductu producibiles.

Inquire modo, quot binarij colligi possint, ex indicatis hic speciebus quantitatum, quæ inter se comparari possunt; sic enim habebis numerum, indicantem aliquam partem propositionum diuersarum, quæ requirerentur, vt veritates contentæ prædictis tribus nostris theorematibus, proponerentur methodo Euclidea: ex quo tandem statues, quale volumen requireretur, vt Euclidea methodo proponerentur veritates, quas amplectuntur tria theoremata, præcedenti capite proposita, & quam verum sit, quod paulo ante notauimus; nimirum, quod si methodo ab Euclide vsitata, tantum proponendæ forent veritates, contentæ tribus theorematibus, superiori capite propositis: oporteret volumen conscribere, maius libris omnibus ab Euclide conscriptis.

Eadem opera non difficulter concludes, quid statuendum sit, de

R vni-

vniuersalitate, aut vtilitate prædictorum theorematum: præsertim si reflectas, maiorem partem quantitatum paulo ante enumeratarum, atque nostra methodo facile inter se comparabilium, talem esse, vt earum nusquam meminerit Euclides, aut Archimedes; de his quantitatibus, atque vtilitate quæ resultat ex earum consideratione: plura nobis alibi dicenda sunt. Quæ Euclidis aut Archimedis theoremata, vt ita dicam, contineantur tribus theorematibus præcedentis capitis: & quomodo ex his, illa inferantur: intelligere poteris ex sequenti capite.

CAPVT III.

Proponuntur varia Euclidis, aut Archimedis theoremata, deducta ex tribus theorematibus propositis in primo capite.

EX inferiori loco, in altiorem montem ascendere, difficilius est, quam ex eodem monte descendere: tamen descensus etiam habet difficultates suas. Pari modo, à particularibus, ad vniuersalia pergere, difficilius est, quam ex vniuersalibus inferre magis restricta: id tamen suas difficultates annexas habet. In præcedentibus, veluti manuducendo atque præcedendo, exhibui ascensum ad theoremata aliqua vniuersalia; vt appareat quomodo ab his vniuersalioribus theorematibus descendatur, atque inferantur magis restricta theoremata, vtilis erit, subsequens Logistica exercitatio, me dirigente ab aliquo ex meis composita: in qua, huiusmodi descensus specimen exhibetur, in varijs Euclidis, aut Archimedis theorematibus, quæ aliquid statuunt, de proportione duarum quantitatum, atque ex tribus primi capitis theorematibus, tanquam ex fontibus deriuantur. Theorematum tituli & numeri quibus citantur desumpti sunt ex Euclideis elementis, conscriptis à P. Andrea Taquet Societatis Iesu, pluries iterata impressione approbatis: atque ex eodem authore supponuntur, expositiones terminorum, qui adhibentur in titulis theorematum: & à nobis non declarantur.

Mar-

MARCELLI ROCCHI E' SOCIETATE IESV Logiſtica exercitatio

In qua demonſtrantur varia Euclidis atque Archimedis principaliora theoremata.

Theorema I.

PArallelogramma A D & E H, conſtituta inter eaſdem parallelas, atque eamdem, vel æquales baſes habentia: ſunt inter ſe æqualia, *Euclidis prop. 35. & 36. lib. 1.*

Conſtructio. Parallelogrammi A D, baſis ſit A B, altitudo C R; Parallelogrammi E H, baſis ſit E F, altitudo G P. *Fig. 28.*

Demonſtratio. Per hypotheſim parallelogramma A D & E H, ſunt conſtituta inter eaſdem parallelas: ergo C R = G P: ergo, *per aſſertionem 2. theor. 1. cap. 1.* A B *in* R C ductu primæ claſſis *ad* E F *in* P G ductu primæ claſſis = A B *ad* E F: ſed A B *in* R C ductu primæ claſſis = parallelogrammo A D; item E F *in* P G ductu primæ claſſis= parallelogrammo E H: ergo parallelogrammum A D *ad* parallelogrammum E H = A B *ad* E F, atqui, *per hypotheſim*, A B = E F: ergo parallelogrammum A D = parallelogrammo E H. Quod erat demonſtrandum.

Theorema II.

TRiangula A B C, & E F G, conſtituta ſuper eadem, vel æquali baſi, atque inter eaſdem parallelas: ſunt inter ſe æqualia. *Euclidis prop. 37. & 38. lib. 1.*

Conſtructio. Trianguli A B C, baſis ſit A B, altitudo R C. Trianguli E F G, baſis ſit E F, altitudo P G. *Fig. 29.*

Demonſtratio. Per hypotheſim, triangula A B C, & E F G, ſunt conſtituta inter eaſdem parallelas: ergo R C = P G: ergo, *per aſſertionem 2. Theor. 1. cap. 1.* etiam A B *in* R C ductu ſecundæ claſſis *ad* E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = A B *ad* E F: ſed A B *in* R C ductu ſecundæ claſſis = triangulo A B C; item E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = triangulo E F G: ergo triangulum A B C, *ad* triangulum E F G = A B *ad* E F: atqui, *per hypotheſim*, A B = E F: ergo triangulum A B C = triangulo E F G. Quod erat demonſtrandum.

Theorema III.

SI triangulum E F G, ſit in iiſdem parallelis, cum parallelogrammo A D,& eamdem, vel æqualem baſim habeat, ipſius dimidium erit. *Euclidis prop.* 41. *lib.* 1.

Fig. 28. *&* 29. Conſtructio. Trianguli E F G, baſis ſit E F, altitudo P G. Parallelogrammi A D, baſis ſit A B, altitudo R C.

Demonſtratio. Per hypotheſim, triangulum E F G, & parallelogrammum A D, ſunt in iiſdem parallelis: ergo P G = R C: ſed per hypotheſim etiam A B = E F: ergo A B *in* R C *in* 6 = E F *in* P G *in* 6: ergo A B *in* R C *in* 6 *ad* E F *in* P G *in* 3 = 6 *ad* 3: ſed, *per aſſertionem* 1. *theor.* 2. *cap.* 1. patet A B *in* R C ductu primæ claſſis *ad* E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = A B *in* R C *in* 6 *ad* E F *in* P G *in* 3: ergo A B *in* R C ductu primæ claſſis *ad* E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = 6 *ad* 3: ſed A B *in* R C ductu primæ claſſis = parallelogrammo A D; item E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = triangulo E F G: ergo parallelogrammum A D *ad* triangulum E F G = 6 *ad* 3: ergo triangulum E F G, eſt dimidium parallelogrammi A D. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IV.

Fig. 20. SI trianguli A B C, angulus A B C rectus ſit: quadratum A C, erit æquale quadratis A B & B C, ſimul ſumptis. *Euclidis prop.* 47. *lib.* 1.

Conſtructio ducta ſit recta B D, lateri A C perpendiculariter occurrens in D.

Demonſtratio. *Per theor.* 10. *partis* 3. *ideſ*, A C *ad* A B = A B *ad* A D: ergo, *per aſſertionem* 4. *theor.* 1. *cap.* 1. A C *in* A D ductu primo = A B *in* A B ductu primo. Similiter, *per theor.* 10. *partis* 3. *ideſ*, A C *ad* B C = B C *ad* D C: ergo, *per aſſertionem* 4. *theor.* 1. *cap.* 1. A C *in* D C ductu primo = B C *in* B C ductu primo: ergo A C *in* A D ductu primo † A C *in* D C ductu primo = A B *in* A B ductu primo † B C *in* B C ductu primo: ſed A C *in* A D ductu primo † A C *in* D C ductu primo = A C *in* A D † D C ductu primo = A C *in* A C ductu primo, vt patet ex conſtructione: ergo A C *in* A C ductu primo = A B *in* A B ductu primo † B C *in* B C ductu primo: atqui A C *in* A C ductu primo = quadrato A C; item A B *in* A B ductu primo

mo

mò = quadrato A B, denique B C *in* B C ductu primo = quadrato B C: ergo quadratum A C = quadrato A B † quadrato B C. Quod erat demonstrandum.

Theorema V.

Parallelogramma, & triangula, quæ æqualem habent altitudinem, siue inter easdem existunt parallelas, eam inter se proportionem habent, quam bases. *Euclidis prop.1.lib 6.* *Fig. 28. & 29.*

Constructio. Siue vtraque superficies sit parallelogrammum, siue vtraque sit triangulum: superficiei C A B basis sit A B, altitudo R C. Item superficiei G E F, basis sit E F, altitudo P G.

Demonstratio. Siue superficies C A B & G E F, singulæ sint parallelogramma, siue singulæ sint triangula, producuntur ex basi in altitudinem ductu eiusdem classis: ergo vtroque casu, A B *in* R C ductu alicuius classis = superficiei C A B; item E F *in* P G ductu eiusdem classis = superficiei G E F: ergo vtroque casu, superficies C A B *ad* superficiem G E F = A B *in* R C ductu alicuius classis *ad* E F *in* P G ductu eiusdem classis: sed quoniam, *per hypothesim*, R C = P G, *per assertionem 2.theor.1.cap.1.* etiam A B *in* R C ductu alicuius classis *ad* E F *in* P G ductu eiusdem classis = A B *ad* E F; ergo vtroque casu, superficies C A B *ad* superficiem G E F = A B *ad* E F. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Aequalia parallelogramma C A D & G E F, quæ vnum angulum A, vni angulo E, æqualem habent: etiam latera circa æquales angulos, habent reciprocè proportionalia. Et si latera circa æquales angulos habeant reciprocè proportionalia, erunt inter se æqualia. *Euclidis prop.14.lib.6.* *Fig. 28.*

Constructio. Ductæ sint rectæ C R & G P, quæ perpendiculariter occurrant rectis A B & E F, in punctis R & P.

Demonstratur prima pars. A B *in* R C ductu primæ classis = parallelogrammo C A B; item E F *in* P G ductu primæ classis = parallelogrammo G E F: atqui per hypothesim parallelogrammum C A B = parallelogrammo G E F: ergo A B *in* R C ductu primæ classis = E F *in* P G ductu primæ classis, ergo, *per assertionem 4.theor. 1.cap.2.* etiam A B *ad* E F = P G *ad* R C: sed quoniam, *per hypothesim*, angulus A = angulo E, *per theor.8.partis 3.idea*, E G *ad* A C

= P

= P G *ad* R C: ergo etiam A B *ad* E F = E G *ad* A C, vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim augulus A = angulo E: ergo, *per theor.8.partis 3.ideæ*, E G *ad* A C = P G *ad* R C: sed *per hypothesim*, A B *ad* E F = E G *ad* A C: ergo A B *ad* E F = P G *ad* R C: ergo, *per assertionem 4.theor.1.cap.1.* A B *in* R C ductu primæ classis = E F *in* P G ductu primæ classis: sed A B *in* R C ductu primæ classis = parallelogrammo C A B; item E F *in* P G ductu primæ classis = parallelogrammo G E F: ergo parallelogrammum C A B = parallelogrammo G E F. vt asseritur in secunda parte.

Theorema VII.

Fig. 29. Æqualia triangula C A B & G E F, quæ vnum angulum A, vni angulo E, æqualem habent: etiam latera circa æquales angulos habent reciprocè proportionalia. Et si latera circa æquales angulos habeant reciprocè proportionalia, erunt inter se æqualia. *Euclidis prop.15.lib.6.*

Constructio ductæ sint rectæ C R & G P, quæ perpendiculariter occurrant rectis A B & E F, in punctis R & P.

Demonstratur prima pars. A B *in* R C ductu secundæ classis = triangulo C A B; item E F *in* P G ductu secundæ classis = triangulo G E F: atqui, *per hypothesim*, triangulum C A B = triangulo G E F: ergo A B *in* R C ductu secundæ classis = E F *in* P G ductu secundæ classis: ergo, *per assertionem 4.theor.1.cap.1.* etiam A B *ad* E F = P G *ad* R C: sed quoniam, *per hypothesim*, angulus A = angulo, E *per theor.8. partis tertiæ ideæ*, E G *ad* A C = P G *ad* R C: ergo etiam A B *ad* E F = E G *ad* A C. Vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim angulus A = angulo, E ergo, *per theor.8. partis tertiæ ideæ*, E G *ad* A C = P G *ad* R C: sed, *per hypothesim*, A B *ad* E F = E G *ad* A C: ergo A B *ad* E F = P G *ad* R C: ergo, *per assertionem 4.theor. 1. cap.1.* etiam A B *in* R C ductu secundæ classis = E F *in* P G ductu secundæ classis: sed A B *in* R C ductu secundæ classis = triangulo C A B; item E F *in* P G ductu secundæ classis = triangulo G E F: ergo triangulum C A B = triangulo G E F. Quod erat secundum.

Theorema VIII.

Si quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, fuerint proportionales: rectangulum X, factum sub extremis A & D: æquatur rectangulo

lo Z, facto sub medijs B & C. Et viciſſim, ſi rectangulum X, factum ſub extremis A & D: æquetur rectangulo Z, facto ſub medijs B & C: rectæ A, B, C, D, erunt proportionales. *Euclidis prop. 16.lib.6.*

Demonſtratio. A *in* D ductu primæ claſſis = rectangulo X; item B *in* C ductu primæ claſſis = rectangulo Z: ergo, *per aſſertionem 4. theor.1. cap.1.* etiam rectangulum X = rectangulo Z, ſi A *ad* B = C *ad* D: atque viciſſim A *ad* B = C *ad* D, ſi rectangulum X = rectangulo Z. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IX.

SI tres rectæ lineæ A, B, C, fuerint proportionales: rectangulum X, factum ſub extremis A & C: æquatur quadrato Z, facto ſub media B. Et viciſſim, ſi rectangulum X, factum ſub extremis A & C: æquetur quadrato Z, facto ſub media B: rectæ A, B, C, erunt proportionales. *Euclidis prop.17.lib.6.*

Demonſtratio. A *in* C ductu primæ claſſis = rectangulo X; item B *in* B ductu primæ claſſis = quadrato Z: ergo, *per aſſertionem 4. theor.1.cap.1.* etiam rectangulum X = quadrato Z, ſi A *ad* B = B *ad* C: & viciſſim A *ad* B = B *ad* C, ſi rectangulum X = quadrato Z. Quod erat demonſtrandum.

Theorema X.

SImilium triangulorum A B C & E F G, proportio, eſt duplicatã proportionis laterum A B & E F, æqualibus angulis oppoſitorum. *Euclidis prop.19 lib.6.* *Fig. 29.*

Conſtructio. Ductæ ſint rectæ C R & G P, quæ perpendiculariter occurrant rectis A B & E F, in punctis R & P.

Demonſtratio. Per hypotheſim, triangulum A B C, eſt ſimile triangulo E F G: ergo angulus A = angulo E: ergo, *per conſtructionem & theor.8.partis 3.ideæ*, A C *ad* E F = R C *ad* P G: ſed, *per hypotheſim*, A C *ad* E G = A B *ad* E F: ergo A B *ad* E F = R C *ad* P G: ergo, *per aſſertionẽ 5.theor.1.cap.1.* etiã A B *in* R C ductu ſecundę claſſis *ad* E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = A B 2 *ad* E F 2: ſed A B *in* R C ductu ſecundæ claſſis = triangulo A B C; item E F *in* P G ductu ſecundæ claſſis = triangulo E F G: ergo triangulum A B C *ad* triangulum E F G = A B 2 *ad* E F 2, atqui A B 2 *ad* E F 2 habet duplicatam ratio-

tionem A B *ad* E F, vt patet ex terminis: igitur triangulum A B C *ad* triangulum E F G habet duplicatam rationem A B *ad* E F. Quod erat demonstrandum.

Theorema XI.

QVæuis similes figuræ rectilineæ X & Z, habent duplicatam rationem laterum homologorum. *Euclidis prop.20. lib.6.*

Fig. 30. Constructio. Latera homologa sint A B & F G; item B C & G H item C D & H I; item D E & I K.

Demonstratio. Per hypothesim angulus B = angulo G, & insuper A B *ad* F G = B C *ad* G H: ergo, *per theor.5. tertiæ partis Ideæ*, triangulum B C A est simile triangulo G H F. Deinde quia triangulum B C A est simile triangulo G H F, angulus B C A = angulo G HF: Sed etiam, *per hypothesim*, angulus B C D = angulo G H I: ergo angulus B C D – B C A = angulo G H I – G H F: ergo angulus A C D = angulo F H I: sed etiam, quia triangulum B C A, est simile triangulo G H F, patet A C *ad* F H = B C *ad* G H ≏ C D *ad* H I, vt constat ex hypothesi: ergo, *per theor.5. tertiæ partis Ideæ*, triangulum A C D est simile triangulo F H I. Rursus quia triangulum A C D est simile triangulo F H I, angulus C D A = angulo H I F: sed etiam *per hypothesim*, angulus C D E = angulo H I K: ergo angulus C D E – C D A = angulo H I K – H I F: ergo angulus A D E = angulo F I K: sed etiam, quia triangulum A C D est simile triangulo F H I, patet A D *ad* F I = C D *ad* HI ≏ D E *ad* I K: ergo, *per theor.5. partis tertiæ Ideæ*, triangulum A D E est simile triangulo F I K. Hinc, *per theor.10.* constat triangulum B C A *ad* triangulum G H F = B C 2 *ad* G H 2, item triangulum A C D *ad* triangulum F H I = C D 2 *ad* H I 2 ≏ B C 2 *ad* G H 2, *vt patet ex hypothesi*: item triangulum A D E *ad* triangulum F I K = D E 2 *ad* I K 2 ≏ B C 2 *ad* G H 2, *vt patet ex hypothesi*: igitur triangulum B A C † A C D † A D E *ad* triangulum G H F † F H I † F I K = B C 2 † B C 2 † B C 2 *ad* G H 2 † G H 2 † G H 2 ≏ 3 B C 2 *ad* 3 G H 2 ≏ B C 2 *ad* G H 2: quoniam igitur triangulum B A C † A C D † A D E = figuræ X, item triangulum G H F † F H I † F I K = figuræ Z, manifestum est, figuram X *ad* figuram Z = B C 2 *ad* G H 2. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XII.

Æ Quiangula parallelogramma C A B, & G E F: inter se rationem habent compositam ex rationibus laterum contiguorum, A C *ad* E G. & A B *ad* E F. *Euclidis prop. 23.lib.6.* *Fig. 28.*

Constructio. Ductæ sint rectæ C R & G P, quæ perpendiculariter occurrant rectis AB & E F, in punctis R & P.

Demonstratio. Per assertionem 1.theor.1.cap.1. patet, A B *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* P G ductu primæ classis = A B *ad* E F *in* R C *ad* P G: sed quoniam per hypothesim angulus A = angulo E etiam (*per constructionem, & theor.8. partis 3. Ideæ*) patet R C *ad* P G = A C *ad* E F: ergo A B *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* P G ductu primæ classis = A B *ad* E F *in* A C *ad* E G: sed etiam A B *in* R C ductu primæ classis = parallelogrammo C A B; item E F *in* P G ductu primæ classis = parallelogrammo G E F: ergo parallelogrammum C A B *ad* parallelogrammum G E F = A B *ad* E F *in* A C *ad* E G. Quod erat demonstrandum.

Theorema XIII.

Si quatuor numeri A, B, C, D, proportionales fuerint; numerus X, genitus ex primo A, & quarto D; æquatur numero Z, genito ex secundo B & tertio C. Et viciſſim si numerus X, genitus ex primo A & quarto D: æquetur numero Z, genito ex secundo B & tertio C: numeri A, B, C, D, erunt proportionales. *Euclidis prop. 19.lib.7.*

Demonstratio. A *in* D ductu primæ classis = numero X; item B *in* C ductu primæ classis = numero Z: ergo, *per assertionem 4.theor.1. cap.1.* numerus X = numero Z, si A *ad* B = C *ad* D. Et viciſſim A *ad* B = C *ad* D, si numerus X = numero Z. Quod erat demonstrandū.

Theorema XIV.

Si tres numeri A, B, C, proportionales fuerint, numerus X, genitus ab extremis A & C: æquatur numero Z, genito à medio B ducto in se. Et viciſſim, si numerus X, genitus ab extremis A & C = numero Z, genito à medio B ducto in se; numeri A, B, C,

S erunt

erunt proportionales. *Euclidis prop. 20. lib. 7.*

Demonstratio. A *in* C ductu primæ classis = numero X; item B *in* B ductu primæ classis = numero Z; ergo, *per assertionem 4. theor. 1. cap. 1.* numerus X = numero Z, si A *ad* B = B *ad* C. Et vicissim A *ad* B = B *ad* C, si numerus X = numero Z. Quod erat demonstrãdum.

Theorema XV.

SI numerus A, ductus in numerum C, producat numerum X; item numerus B, ductus in numerum D, producat numerum Z; numerus X ad numerum Z, habebit rationem compositam ex rationibus A *ad* B & C *ad* D. *Euclidis prop. 5. lib. 8.*

Demonstratio. A *in* C ductu primæ classis = numero X; item B *in* D ductu primę classis = numero Z: ergo, *per assertionem 1. theor. 1. cap. 1.* numerus X *ad* numerum Z = A *ad* B *in* C *ad* D. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVI.

SI numerus A ductus in se, producit numerum X; item numerus B, ductus in se, producit numerum Z; numerus X ad numerum Z, habebit duplicatam rationem numeri A ad numerum B. *Euclidis prop. 11. lib. 8.*

Demonstratio. A *in* A ductu primæ classis = numero X; item B *in* B ductu primæ classis = numero Z: sed etiam A *ad* B = A *ad* B: ergo, *per assertionem 5. theor. 1. cap. 1.* numerus X *ad* numerum Z = A 2 *ad* B 2. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVII.

SI eamdem rationem habeant, numerus A ad numerum B, item numerus C ad numerum D, item numerus E ad numerum F: & numeri A, C, E multiplicati producant numerum X: numeri vero B, D, F, multiplicati producunt numerum Z; numerus X, ad numerum Z, habebit triplicatam rationem numeri A ad numerum B. *Euclidis prop. 19. lib. 8.*

Demonstratio. Per hypothesim A *in* C *in* E = numero X, item B *in* D *in* F = numero Z: sed, *per assertionem 1. theor. 1. cap. 1.* etiam A

in

in C *in* E *ad* B *in* D *in* F = A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F: ergo numerus X *ad* numerum Z = A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F: sed *quoniam per hypothesim*, A *ad* B = C *ad* D ≏ E *ad* F, etiam A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F = A *ad* B *in* A *ad* B *in* A *ad* B: ergo numerus X *ad* numerum Z = A *ad* B *in* A *ad* B *in* A *ad* B: sed, *per theor.17.partis 4.ideæ*, A *ad* B *in* A *ad* B *in* A *ad* B = A *in* A *in* A *ad* B *in* B *in* B ≏ A 3 *ad* B 3: ergo numerus X *ad* numerum Z = A 3 *ad* B 3. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVIII.

Parallelepipeda X & Z, habentia bases & altitudines æquales, sunt inter se æqualia. *Euclidis prop.29.30.& 31.lib.11.*

Constructio. Parallelepipedi X, basis sit A K, altitudo R C; parallelepipedi Z, basis sit E L, altitudo P G. *Fig. 31.*

Demonstratio. Per hypothesim A K = E L item R C = P G: ergo A K *ad* E L = P G *ad* R C: ergo, *per assertionem 4. theor. 1. cap.1.* etiã A K *in* R C ductu primæ classis = E L *in* P G ductu primæ classis: atqui A K *in* R C ductu primæ classis = parallelepipedo X; item E L *in* P G ductu primæ classis = parallelepipedo Z: ergo parallelepipedum X = parallelepipedo Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XIX.

Parallelepipeda X & Z, æqualem altitudinem habentia, sunt inter se vt bases. *Euclidis prop.32.lib.11.*

Constructio. Parallelepipedi X, basis sit A K, altitudo R C: parallelepipedi Z, basis sit E L, altitudo P G.

Demonstratio. Per hypothesim, R C = P G: ergo, *per assertionem 3.theor.1.cap.1.* etiam A K *in* R C ductu primæ classis *ad* E L *in* P G ductu primæ classis = A K *ad* E L: sed A K *in* R C ductu primæ classis = parallelepipedo X, item E L *in* P G ductu primæ classis = parallelepipedo Z: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepipedum Z = A K *ad* E L. Quod erat demonstrandum. *Fig. 31.*

Theorema X X.

Fig. 31. Similia parallelepipeda X & Z habent triplicatam rationem laterum homologorum. *Euclidis prop.33.lib.11.*

Constructio. Parallelepipedi X, basis sit parallelogrammum S A K, altitudo sit R C. item parallelepipedi Z, basis sit parallelogrammum Q E F, altitudo P G; præterea latera A C & E G, item A B & E F, item A S & E Q sint homologa. Denique rectæ I S & Y Q perpendiculariter occurrant rectis A B & E F, in punctis I & Y.

Demonstratio. Ex eo quod parallelepipeda X & Z sint similia, patet angulum S A B = angulo Q E F, item angulum C A B = angulo G E F: igitur, *per constructionem & theorema 8. partis 3. ideæ* A S *ad* E Q = I S *ad* Y Q, item A C *ad* E G = R C *ad* P G: atqui per hypothesim A B *ad* E F = A S *ad* E Q ≏ R C *ad* P G: ergo A B *ad* E F = I S *ad* Y Q ≏ R C *ad* P G: ergo A B *ad* E F *in* I S *ad* Y Q *in* R C *ad* P G = A B *ad* E F *in* A B *ad* E F *in* A B *ad* E F Ω A B 3 *ad* E F 3: atqui, *per theor. 17. quartæ partis ideæ*, A B *in* I S *in* R C *ad* E F *in* Y Q *in* P G = A B *ad* E F *in* I S *ad* Y Q *in* R C *ad* P G; ergo A B *in* I S *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* Y Q *in* P G ductu primæ classis = A B 3 *ad* E F 3: atqui A B *in* I S *in* R C ductu primæ classis = parallelepipedo X, item E F *in* Y Q *in* P G ductu primæ classis = parallelepipedo Z: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepipedum Z = A B 3 *ad* E F 3. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXI.

Fig. 31. Parallelepipeda æqualia X & Z, reciprocant bases & altitudines; & parallelepipeda X & Z, quæ reciprocant bases & altitudines, sunt æqualia. *Euclidis prop.34.lib.11.*

Constructio. Parallelepipedi X, basis sit A K, altitudo R C; item parallelepipedi Z, basis sit E L, altitudo P G.

Demonstratio. A K *in* R C ductu primæ classis = parallelepipedo X, item E L *in* P G ductu primæ classis = parallelepipedo Z: ergo, *per assertionem 4. theor. 1. cap. 1.* parallelepipedum X = parallelepipedo Z, si A K *ad* E L = P G *ad* R C, & vicissim A K *ad* E L = P G *ad* R C, si parallelepipedum X = parallelepipedo Z; Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XXII.

PArallelepipedum X, factum ex tribus rectis proportionalibus, æquatur parallelepipedo Z, facto à media, & æquiangulo priori. *Euclidis prop.36.lib.11.* Fig. 31.

Constructio A S *ad* A B = A B *ad* A C, item rectæ G E, E F, & E Q, singulæ sint æquales rectæ A B; præterea parallelepipedi X, basis sit parallelogrammum S A B, altitudo R C: item parallelepipedi Z, basis sit parallelogrammum Q E F, altitudo P G: item angulus C A B = angulo G E F, & angulus S A B = angulo Q E F: denique rectæ I S & Y Q, perpendiculariter occurrant rectis A B & E F, in punctis I & Y.

Demonstratio. Per hypothesim angulus S A B = angulo Q E F: ergo, *per theor.8.tertiæ partis ideæ*, A S *ad* E Q = I S *ad* Y Q: ergo A B *ad* E F *in*. I S *ad* Y Q = A B *ad* E F *in* A S *ad* E Q: sed, *per theor.* 1. *cap.* 1. A B *in* I S ductu primæ classis *ad* E F *in* Y Q ductu primæ classis = A B *ad* E F *in* I S *ad* Y Q: ergo A B *in* I S ductu primæ classis *ad* E F *in* Y Q ductu primæ classis = A B *ad* E F *in* A S *ad* E Q: atqui A B *in* I S ductu primæ classis = A K, item E F *in* Y Q ductu primæ classis = E L: ergo A K *ad* E L = A B *ad* E F *in* A S *ad* E Q: sed *per hypothesim* A B = E Q: ergo A K *ad* E L = A B *ad* E F *in* A S *ad* A B: sed, *per theorema* 17.*quartæ partis ideæ*, A B *ad* E F *in* A S *ad* A B = A B *in* A S *ad* A B *in* E F ⩦ A S *ad* E F (vt patet ex assert.3. theor. 1. cap. 1.) ergo A K *ad* E L = A S *ad* E F: ergo A K *in* R C ductu primæ classis *ad* E L *in* P G ductu primæ classis = A S *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* P G ductu primæ classis: sed A K *in* R C ductu primæ classis = parallelepipedo X, item E L *in* P G ductu primæ classis = parallelepipedo Z: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepipedum Z = A S *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* P G ductu primæ classis: sed, *per theorema* 1.*cap.*1. etiam A S *in* R C ductu primæ classis *ad* E F *in* P G ductu primæ classis = A S *ad* E F *in* R C *ad* P G: ergo parallelepipedum X *ad* parallepipedum Z = A S *ad* E F *in* R C *ad* P G: sed (quoniam per hypothesim angulus C A B = angulo G E F, *per theor.8.partis 3.ideæ*) R C *ad* P G = A C *ad* E D: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepipedum Z = A S *ad* E F *in* A C *ad* E G: atqui, *per hypothesim* A B = E F ⩦ E G: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepipedum Z = A S *ad* A B *in* A C *ad* A B: atqui, *per theorema* 17.*quartæ partis ideæ*, etiam A S *ad* A B *in* A C *ad* A B = A S *in* A C *ad* A B *in* A B: ergo parallelepipedum X *ad* parallelepi-

lepipedum Z = A S *in* A C *ad* A B *in* A B: sed quoniam *per hypothesim* A S *ad* A B = A B *ad* A C *per asser.4.theor.1. cap.1.* A S *in* A C = A B *in* A B: ergo parallelepipedum X = parallelepipedo Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXIII.

PArallelepipeda similia, similiterque à lineis proportionalibus descripta, & ipsa sunt proportionalia. *Euclidis prop.37. lib.11.*

Constructio. Parallelepipeda similia sint A, B, C, atque illorum parallelepipedorum latera homologa sint D, E, F.

Demonstratio. Parallelepipedorum Similium A, B, C, latera homologa, sunt D, E, F: ergo, *per theor.15.* parallelepipedum A *ad* parallelepipedum B = D 3 *ad* E 3, item parellalepipedum B *ad* parallelepipedum C = E 3 *ad* F 3: sed (quoniam per hypothesim D *ad* E = E *ad* F) etiam D 3 *ad* E 3 = E 3 *ad* F 3: ergo parallelepipedum A *ad* parallelepipedum B = parallelepipedo B *ad* parallelepipedum C. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXIV.

SI fuerint duo prismata triangularia X & Z, æqualis altitudinis: quorum vnum X habeat basim parallelogrammam, duplam baseos alterius, quæ sit triangula: prismata erunt æqualia. *Euclidis prop.40. lib.11.*

Fig. 32. Constructio. Prismatis X, basis sit parallelogrammum A B K, altitudo sit R C: item prismatis Z, basis sit triangulum E F L, altitudo sit P G.

Demonstratio. *Per theor.2.cap.1.* A B K *in* R C ductu secundæ classis *ad* E F L *in* P G ductu primæ classis = A B K *in* R C *in 6 ad* E F L *in* P G *in 3*: sed (quoniam per hypothesim R C = P G) etiam A B K *in* R C *in 6 ad* E F L *in* P G *in 3* = A B K *in 6 ad* E F Q *in 3*: ergo A B K *in* R C ductu secundæ classis *ad* E F L *in* P G ductu primæ classis = A B K *in 6 ad* E F L *in 3*, sed (quoniam per hyothesim A B K *ad* E F L = *3 ad 6*) etiam, *per assert.4.theorematis 1.cap.1.* A B K *in 6* = E F L *in 3*: ergo A B K *in* R C ductu secundæ classis = E F L *in* P G ductu primæ classis: atqui A B K *in* R C ductu secundæ classis = prismati X, item E F L *in* P G ductu primæ classis = prismati Z; ergo prisma X = prismati Z. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XXV.

Circulorum X & Z proportio eſt duplicata proportionis diametrorum. *Euclidis prop.2.lib.12.*

Conſtructio. Circuli X, radius ſit A B, circumferentia B C D: item circuli Z radius ſit E F circumferentia F G H. *Fig. 33.*

Demonſtratio. Per 1. axioma hypotheticum cap.13. partis 2. Ideæ, A B *ad* E F = B C D *ad* F G H: ergo, *per aſſertionem 5.theor.1.cap.1.* etiam A B *in* B C D ductu ſecundæ claſſis *ad* E F *in* F G H ductu ſecundæ claſſis = A B 2 *ad* E F 2: ſed A B 2 *ad* E F 2 = 2 A B 2 *ad* 2 E F 2: ergo A B *in* B C D ductu ſecundæ claſſis *ad* E F *in* F G H ductu ſecundæ claſſis = 2 A B 2 *ad* 2 E F 2: ſed A B *in* B C D ductu ſecundæ claſſis = circulo X, item E F *in* F G H ductu ſecundæ claſſis = circulo Z: ergo circulus X *ad* circulum Z = 2 A B 2 *ad* 2 E F 2. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XXVI.

Pyramides X & Z, æque altæ, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes. *Euclidis prop.5. & 6. lib.12.* *Fig. 34.*

Conſtructio. Pyramidis X, baſis ſit A K, altitudo R C: item pyramidis Z, baſis ſit E L, altitudo P G.

Demonſtratio. Per hypotheſim R C = P G: ergo, *per aſſertionem 2.theor.1.cap.1.* etiã A K *in* R C ductu tertiæ claſſis *ad* E L *in* P G ductu tertiæ claſſis = A K *ad* E L; ſed A K *in* R C ductu tertiæ claſſis = pyramidi X, item E L *in* P G ductu tertiæ claſſis = pyramidi Z: ergo pyramis X *ad* pyramidem Z = A K *ad* E L. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XXVII.

Omnis pyramis X, tertia pars eſt priſmatis Z, habentis æqualem baſim, & altitudinem. *Euclidis prop.7.lib.12.*

Conſtructio. Pyramidis X, baſis ſit A K, altitudo R C: item priſmatis Z, baſis E F L, altitudo P G. *Fig. 32. & 34.*

Demonſtratio. Per hypotheſim A K = E F L, item R C = P G: ergo, *per aſſertionem 2.lemmatis cap.1.* A K *in* R C ductu tertiæ claſſis

ad

ad E F L *in* P G ductu primæ claſſis = 2 *ad* 6 : ſed A K *in* R C ductu tertiæ claſſis = pyramidi X, item E F L *in* P G ductu primæ claſſis = priſmati Z : ergo pyramis X *ad* priſma Z = 2 *ad* 6. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XXVIII.

Similium pyramidum X & Z, proportio, eſt triplicata proportionis quam habent latera homologa. *Euclidis prop.8.lib.12.*

Fig. 34. Conſtructio. Pyramis X habeat baſim A K, altitudinem R C: item pyramis Z habeat baſim E L altitudinem P G denique latera homologa ſint A C & E G, item A B & E F.

Demonſtratio. Ex eo quod pyramides X & Z ſint ſimiles, atque illarum pyramidum latera homologa ſint A C & E G, patet angulum C A R = angulo G E P: ergo, *per conſtructionem & theor. 8. partis 3. ideæ*, A C *ad* E G = R C *ad* P G: ſed, *per hypotheſim*, A B *ad* E F = A C *ad* E G: ergo A B *ad* E F = R C *ad* P G: ſed quoniam per hypotheſim ſuperficies A K eſt ſimilis ſuperficiei E L, *per theor.* 11. A K *ad* E L = A B 2 *ad* E F 2: ergo A K *ad* E L = R C 2 *ad* P G 2; ergo, *per aſſert. 6. theor. 1. cap. 1.* etiam A K *in* R C ductu tertiæ claſſis *ad* E L *in* P G ductu tertiæ claſſis = R C 3 *ad* P G 3 = A B 3 *ad* E F 3: atqui A K *in* R C ductu tertiæ claſſis = pyramidi X, item E L *in* P G ductu tertiæ claſſis = pyramidi Z: ergo pyramis X *ad* pyramidem Z = A B 3 *ad* E F 3. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XIX.

Æquales pyramides X & Z, reciprocant baſes & altitudines; & pyramides X & Z, quæ reciprocant baſes & altitudines, ſunt æquales. *Euclidis prop. 9. lib. 12.*

Conſtructio. Pyramis X, habeat baſim A K: altitudinem R C: item pyramis Z, habeat baſim E L, altitudinem P G.

Fig. 34. Demonſtratio. A K *in* R C ductu tertiæ claſſis = pyramidi X, item E L *in* P G ductu tertiæ claſſis = pyramidi Z: ergo, *per aſſertionem 4. theor. 1. cap. 1.* pyramis X = pyramidi Z, ſi A K *ad* E L = P G *ad* R C; & viciſſim A K *ad* E L = P G *ad* R C, ſi pyramis X = pyramidi Z. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema XXX

OMnis conus X tertia pars est cylindri Z, habentis æqualem basim, & altitudinem. *Euclidis prop.10.lib.12.*

Constructio. Coni X, basis sit A K, altitudo R C: cylindri Z, basis sit E L altitudo P G. *Fig. 35. & 36.*

Demonstratio. Per hypothesim A K = E L: item R C = P G: ergo, *per assertionem 2.theor.2.cap.1.* A K *in* R C ductu tertiæ classis *ad* E L *in* P G, ductu primæ classis = 2 *ad* 6: sed A K *in* R C ductu tertiæ classis = cono X: item E L *in* P G ductu primæ classis = cylindro Z: ergo conus X *ad* cylindrum Z = 2 *ad* 6. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXI.

COnorum X & Z æquè altorum, proportio eadem est, quæ basium. Idem accidit in cylindris X & Z, æquè altis. *Euclidis prop.11.lib.12.*

Constructio. Coni atque cylindri X, basis sit A K, altitudo R C. Coni & cylindri Z, basis sit E L, altitudo P G. *Fig. 35. & 36.*

Demonstratio. Per hypothesim R C = P G: ergo, per *assertionem 2. theor. 1. cap. 1.* etiam A K *in* R C ductu alicuius classis *ad* E L *in* P G ductu eiusdem classis = A K *ad* E L; sed A K *in* R C ductu tertiæ vel primæ classis = cono vel cylindro X: item E L *in* P G ductu tertiæ vel primæ classis = cono vel cylindro Z: ergo conus vel cylinder X *ad* conum; vel cylindrum Z = A K *ad* E L. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXII.

SImilium conorum X & Z, proportio est triplicata proportionis diametrorum, quæ sunt in basibus. idem accidit cylindris similibus X & Z. *Euclidis prop.12.lib.12.*

Constructio. Coni & cylindri X, basis sit circulus A B K, altitudo sit R C, baseos diameter sit recta A K; similiter coni & cylindri Z, basis sit circulus E F L, altitudo sit P G, baseos diameter sit recta E L. *Fig. 35. & 36.*

Demonstratio. Quoniam conus vel cylinder X, est similis cono vel cylindro Z; ex Euclidea terminorum expositione, patet rectam

T A K

A K *ad* rectam E L = R C *ad* P G: sed *per theor.* 25. circulus A B K *ad* circulum E F L = A K 2 *ad* E L 2: ergo circulus A B K *ad* circulum E F L = R C 2 *ad* P G 2: ergo, *per assertionem 6. theor.* 1. *cap.* 1. circulus A B K *in* R C quouis ductu *ad* circulum E F L *in* P G eodem ductu = R C 3 *ad* P G 3 = A K 3 *ad* E L 3: atqui circulus A B K *in* R C ductu tertiæ vel primę classis = cono vel cylindro X. item circulus E F L *in* P G ductu tertiæ vel primæ classis = cono vel cylindro Z: ergo conus vel cylinder X *ad* conum vel cylindrum Z = A K 3 *ad* E L 3. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXIII.

Cylindri X & Z, habentes bases æquales, inter se sunt vt altitudines. Idem accidit conis X & Z. *Euclidis prop.* 14. *lib.* 12.

Constructio. cylindri & coni X, basis sit A K, altitudo R C; similiter cylindri & coni Z, basis sit E L, altitudo P G.

Fig. 35. & 36.

Demonstratio. Per hypothesim A K = E L: ergo, *per assertionem* 3. *theor.* 1. *cap.* 1. etiam A K *in* R C ductu alicuius classis *ad* E L *in* P G ductu eiusdem classis = A K *ad* E L: atqui A K *in* R C ductu primæ vel tertiæ classis = cylindro vel cono X: item E L *in* P G ductu primæ vel tertiæ classis = cylindro vel cono Z; ergo cylinder vel conus X *ad* cylindrum vel conum Z = A K *ad* E L. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXIV.

Æquales cylindri X & Z, reciprocant bases & altitudines; & si reciprocant bases & altitudines, sunt æquales. Idem accidit conis X & Z. *Euclidis prop.* 15. *lib.* 12.

Constructio. Cylindri & coni X, basis sit A K, altitudo R C; similiter cylindri & coni Z, basis sit E L, altitudo P G.

Fig. 35. & 36.

Demonstratio. A K *in* R C ductu primæ vel tertiæ classis = cylindro vel cono X: item E L *in* P G ductu primæ vel tertiæ classis = cylindro vel cono Z: ergo, *per assert.* 4. *theor.* 1. *cap.* 1. cylinder vel conus X = cylindro vel cono Z, si A K *ad* E L = P G *ad* R C; & vicissim A K *ad* E L = P G *ad* R C, si cylinder vel conus X = cylindro vel cono Z. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XXXV.

SPhærarum X & Z proportio est triplicata proportionis radiorum. *Euclidis prop. 18. lib. 12.*

Constructio: Sphæræ X, radius sit B K, quadrans circuli radio B K descripti sit A B K, circumferentia circuli radio B K descripti sit K R C. similiter sphæræ Z, radius sit F L, quadrans circuli radio F L descripti sit E F L, circumferentia circuli radio F L descripti sit L P G. *Fig. 37.*

Demonstratio. Per primum axioma hypotheticum capitis 13. partis 2. ideæ, K R C *ad* L P G = B K *ad* F L: sed, *per theorema* 25. A B K *ad* E F L = B K 2 *ad* F L 2: ergo A B K *ad* E F L = K R C 2 *ad* L P G 2: ergo, *per assert. 6. theor. 1. cap. 1.* etiam A B K *in* K R C ductu quinto *ad* E F L *in* L P G ductu 5. = K R C 3 *ad* L P G 3 = B K 3 *ad* F L 3: Sed A B K *in* K R C ductu quinto = dimidiæ sphæræ X, item E F L *in* L P G ductu quinto = dimidiæ spæræ Z: ergo dimidia sphæra X *ad* dimidiam sphæram Z = B K 3 *ad* F L 3: ergo etiam tota spæra X *ad* totam sphæram Z = B K 3 *ad* F L 3. Quod erat demonstrandum.

Antequam ab Euclidis theorematibus hactenus propositis, pergam ad theoremata Archimedis: propono tria theoremata desumpta ex subsequente parte ideæ logisticæ, quæ non parum videbantur conducere, ad magis expeditam demonstrationem aliquorum theorematum proponendorum ex selectis Archimedis theorematibus propositis a P. Taquet.

Theorema XXXVI.

CIrculus X, ad quadratum factum supra radium circuli X, habet eamdem proportionem quam dimidia circumferentia habet ad radium.

Constructio. Circuli X, radius sit A B, circumferentia sit B C D. *Fig. 33.*

Demonstratio. Per theor. 2. cap. 1. A B *in* B C D ductu primo *ad* A B *in* B C D ductu quarto = 2 *ad* 1: sed, *per theor. 1. cap. 1.* etiam 2 A B *in* B C D ductu quarto *ad* A B *in* B C D ductu quarto = 2 *ad* 1: ergo, *per theor. 2. partis quartæ ideæ*, 2 A B *in* B C D ductu quarto = A B *in* B C D ductu primo: sed, *per theor. 1. cap. 1.* etiam A B *in* B C D ductu primo *ad* A B *in* A B ductu primo = B C D *ad* A B: ergo, 2 A B *in* B C D ductu quarto *ad* A B *in* A B ductu primo =

T 2 B C D

B C D *ad* A B : ergo A B *in* B C D ductu quarto *ad* A B *in* A B ductu primo = dimidio B C D *ad* A B : sed A B *in* B C D ductu quarto = circulo X, item A B *in* A B ductu primo = quadrato facto supra radium circuli X: ergo circulus X *ad* quadratum factum supra radium circuli X = dimidio B C D *ad* AB. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXVII.

POsito quod circuli arcus D K non sit maior quarta parte circumferentiæ circuli, quodque eius sinus sit æqualis lineæ K E: productum ex D K in K R C ductu quinto æquabitur producto ex K E *in K R C* ductu primo.

Fig. 38. Demonstratio. Per lemma capitis primi, D K *in* K R C ductu primo *ad* D K *in* K R C ductu quinto = D K *ad* K E: sed etiam, *per theor. 1. cap. 1.* D K *in* K R C ductu primo *ad* K E *in* K R C ductu primo D K *ad* K E: ergo D K *in* K R C ductu primo *ad* D K *in* K R C ductu quinto = D K *in* K RC ductu primo *ad* K E *in* *K* RC ductu primo: ergo, *per theor. 2. partis 4. ideæ*, D K *in* K R C ductu quinto = K E *in* K R C ductu primo. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXVIII.

POsito quod A B K sit quadrans circuli, cuius radius sit æqualis lineæ A B, tota verò circuferentia circuli sit æqualis lineę K R C:
Fig. 37. productum ex A B K *in* A B ductu primo, ad productum ex A B K *in* K R C ductu quinto, habebit rationem quam 3 habet ad 8.

Demonstratio. Per assert. 3. theor. 1. cap. 1. A B K *in* A B ductu primo *ad* A B K *in* K R C ductu primo = A B *ad* K R C ♎ 3 A B 2 *ad* 24 A B K, *ut patet ex hypothesi & theor.* 36. atqui, *per theor. 2. cap. 1.* A BK *in* K R C ductu primo *ad* A B K *in* K R C ductu quinto = 6 A B K *ad* 2 A B 2 ♎ 24 A B K *ad* 8 A B 2: ergo, ex æquo, A B K *in* A B ductu primo *ad* A B K *in* K R C ductu quinto = 3 A B 2 *ad* 8 A B 2 ♎ 3 *ad* 8. Quod erat demonstrandum.

Theorema XXXIX.

Fig. 29. & 33. CIrculus X, est æqualis triangulo Z cuius basis æquatur circumferentiæ circuli X, & altitudo æquatur radio circuli X. *Archimedis prop. 5.*

Con-

Constructio. Circuli X, radius sit A B, circumferentia B C D; item trianguli Z, basis sit E F, altitudo P G.

Demonstratio. Ex hypothesi patet A B *ad* E F = P G *ad* B C D: ergo, *per assertionem* 4. *theor.* 1. *cap.* 1. A B *in* B C D ductu secundæ classis = *E F in* P G ductu secūdæ classis: atqui A B *in* B C D ductu secundæ classis = circulo X, item E F *in* P G ductu secundæ classis = triangulo Z: ergo circulus X = triangulo Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XL.

Circulus X, cuius radius A B, est medius proportionalis inter recti cylindri Z latus E G, & baseos diametrum E L: æqualis est superficiei cylindricæ. *Archimedis prop.* 11. Fig. 33. & 35.

Constructio. Circūferentia circuli X, radio A B descripti, sit B C D, item circumferentia circuli diametro E L descripti sit E F L.

Demonstratio. Per primum axioma hypotheticum capitis 13. partis secundæ ideæ, patet E L *ad* A B = E F L *ad* dimidium B C D: sed, *per hypothesim*, E L *ad* A B = A B *ad* E G: ergo A B *ad* E G = E F L *ad* dimidium B C D: ergo, *per assertionem* 4. *Theor.* 1. *cap.* 1. A B *in* dimidium B C D ductu primo = E F L *in* E G ductu primo; sed quoniam, *per* 4. *axioma hypotheticum cap.* 13. *partis secundæ ideæ*, A B *in* B C D ductu primo *ad* A B *in* B C D ductu quarto = 2 *ad* 1, patet A B *in* dimidium C B D ductu primo = A B *in* B C D ductu quarto: ergo A B *in* B C D ductu quarto = E F L *in* E G ductu primo: sed A B *in* B C D ductu quarto = circulo X; item E F L *in* E G ductu primo = cylindricæ superficiei Z: ergo circulus X = cylindricæ superficiei Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XLI.

Cylindri recti X superficies est ad basim, vt latus A C, ad quartam partem diametri baseos. *Archimedis prop.* 12. Fig. 35.

Constructio Baseos diameter sit A K, tota baseos circumferentia sit A B K.

Demonstratio. Per assertionem 3. theor. 1. cap. 1. A B K *in* A C ductū primo *ad* A B K *in* dimidium A K ductu primo = A C *ad* dimidium A K: sed A B K *in* dimidium A K = dimidio A K in A B K; ergo A B K *in* A C ductu primo *ad* dimidiū A K *in* A B K ductu primo

mo = A C *ad* dimidium A *K* : atqui, *per* 4 *axioma hypotheticum cap.* 13. *partis secunda idea*, etiam dimidium A *K in* A B *K* ductu primo *ad* dimidium A K *in* A B *K* ductu quarto = dimidio A *K ad* quartã partem A *K* : ergo, *per theor.* 5. *partis quarta idea, ex aquo*, A B *K in* A C ductu primo *ad* dimidium A *K in* A B *K* ductu quarto = A C *ad* quartam partem A *K* : sed A B *K in* A C ductu primo = superficiei cylindri recti X, item dimidium A *K in* A B *K* ductu quarto = basi cylindri X: ergo superficies cylindri X *ad* basim cylindri X = A C *ad* quartam partem A *K*. Quod erat demonstrandum.

Theorema XLII.

Circulus X, cuius radius A B, est medius proportionalis inter coni recti Z, latus E G, & basis radium, æqualis est superficiei conicæ. *Archimedis prop.* 13.

Fig. 33. *&* 36. Cõstructio. Circuli X circũferentia sit B C D; itẽ radius baseos coni recti Z sit dimidiũ E L, atque eiusdẽ baseos tota circũferentia sit E F L.

Demonstratio. Per primum axioma hypotheticum cap. 13. partis secundæ ideæ, dimidium E L *ad* A B = E F L *ad* B C D: sed, *per hypothesim*, dimidium E L *ad* A B = A B *ad* E G : ergo A B *ad* E G = E F L *ad* B C D: ergo, *per assert.* 4. *theor.* 1. *cap.* 1. etiam A B *in* B C D ductu secundæ classis = E F L *in* E G ductu secundæ classis : sed A B *in* B C D ductu secundæ classis = circulo X, item E F L *in* E G ductu secundæ classis = superficiei coni recti Z : ergo circulus X = superficiei coni recti Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema XLIII.

Coni recti X superficies, est ad basim, vt eiusdem coni latus A C ad baseos radium. *Archimedis prop.* 14.

Fig. 36. Constructio. Baseos radius, sit dimidium A K; tota baseos circumferentia sit A B *K*.

Demonstratio. Per assertionem 2 theor. 1. cap. 1. A C *in* A B *K* ductu secundæ classis *ad* dimidium A *K in* A B *K* ductu secundæ classis = A C *ad* dimidium A *K* : sed A C *in* A B *K* ductu secundæ classis = A B *K in* A C ductu secundæ classis : ergo A B *K in* A C ductu secundæ classis *ad* dimidium A *K in* A B *K* ductu secundæ classis = A C *ad* dimidium A *K* ; sed A B *K in* A C ductu secundæ classis = superficiei coni recti X, item dimidium A *K in* A B *K* ductu secun-

dæ

dæ classis = basi coni recti recti X: ergo superficies coni recti X *ad* basim coni recti X = A C *ad* dimidium A *K*. Quod erat demonstrandum.

Theorema XLIV.

Cujuscumque sphæræ X, superficies, quadrupla est maximi circuli eiusdem sphæræ. *Archimedis prop.* 24.

Constructio. Sphæræ X radius sit B *K*, circumferentia maximi circuli sit *K* R C, & arcus A *K* sit quarta pars circumferentiæ maximi circuli. *Fig.* 37.

Demonstratio. Per theorema 37., A *K in K* R C ductu quartæ classis = B *K in K* R C ductu primæ classis: sed, *per 2 theorema cap.* 1. etiam B*K in K* R C ductu primæ classis ad B *K* in *K* R C ductu secūdæ classis = 2 *ad* 1: ergo, *per theor.* 2. *partis quartæ ideæ*, A *K in K* R C ductu quartæ classis *ad* B *K in K* R C ductu secundæ classis = 2 ad 1: atqui A *K in K* R C ductu quartæ classis = dimidiæ superficiei sphæræ X, item B *K in K* R C ductu secundæ classis = circulo maximo sphęræ X; ergo dimidia superficies sphęræ X *ad* circulum maximū sphæræ X = 2 *ad* 1: ergo tota superficies spæræ X *ad* circulum maximum sphæræ X = 4 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema XLV.

Cylindri recti sphæræ circumscripti superficies æqualis est superficiei sphæræ.

Et si cylindrus ac sphæra secentur planis ad axem rectis, erunt singula superficiei cylindricæ segmenta segmentis singulis superficiei sphæricæ æqualia. *Archimedis prop.* 26.

Nota hic Archimedis prop. 25. *neglectam non esse, sed translatam, proponitur enim theoremate* 47. *Fig.* 38.

Constructio. Sphæra habeat diametrum C *K*, cylindrus rectus spæræ circumscriptus sit I H, eius axis sit Q A, planum ad axem perpendiculare secans sphæram & cylindum sit F L G D E, centrum sphæræ B.

Demonstratur prima pars. Ex hypothesi & constructione satis patet *K* H = sinui arcus A D *K*. ergo per theor. 37: A D *K in K* R C ductu quinto = *K* H *in K* R C ductu primo = *K* R C *in K* H ductu primo: sed A D *K in K* R C ductu quinto = superficiei dimidiæ

diæ ſphæræ, item K R C *in* K H ductu primo = ſuperficiei dimidij cylindri: ergo ſuperficies dimidiæ ſphæræ = ſuperficiei dimidij cylindri: ergo ſuperficies totius ſphæræ = ſuperficiei totius cylindri. Quod in prima parte aſſerebatur;

Demonſtratur ſecunda pars. Quoniam ex hypotheſi & constructione patet rectam K E = ſinui arcus D K, *per theorema* 37. D K *in* K R C ductu quinto = K E *in* K R C ductu primo, & etiam A K *in* K R C ductu quinto = K H *in* K R C ductu primo: ergo K A *in* K R C ductu quinto — K E *in* K R C ductu quinto = K H *in* K R C ductu primo — K E *in* K R C ductu primo ♎ K R C *in* K H ductu primo — K R C *in* K E ductu primo: atqui K A *in* K RC ductu quinto — K E *in* K R C ductu quinto = ſuperficiei ſphæricæ portionis L A D, itē K R C *in* K H ductu primo — K R C *in* K E ductu primo = ſuperficiei cylindrici ſegmenti F H: ergo ſuperficies ſphærica portionis L A D = ſuperficiei cylindrici ſegmenti F H Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Hinc patet circulum radio Q A *deſcriptum = ſuperficiei ſphæræ* C K ♎ ſuperficiei cylindricæ I H. Etenim circulus radio B A *ad* circulū radio Q A = 1 *ad* 4, vt patet ex theor: 25. ſed per theor. 41 circulus radio A B *ad* ſuperficiem ſpheræ C K = 1 *ad* 4: ergo circulus radio Q A = ſuperficiei ſphæræ C K ♎ ſuperficiei cylindricæ I H, vt patet ex propoſito theoremate.

Theorema XLVI.

Segmenta ſuperficiei ſpæricæ, parallelis circulis diuiſę, eam inter ſe proportionem habent quam ſegmenta diametri ad parallelos circulos recta. *Archimedis prop*. 27.

Constructio. Sphæræ circumſcriptus ſit cylinder, ſintque cætera vt in constructione præcedentis theorematis.

Demonſtratio. Ex hypotheſi & constructione patet ſegmentorū ſuperficiei cylindri baſes ſingulas eſſe inter ſe æquales, & altitudines æquari ſegmentis diametri: atque illa ſegmenta produci ex baſi in altitudinem ductu primo; igitur per aſſert. 2. theor. 1. cap. 1. ſegmenta ſuperficiei cylindri habent eam proportionem, quam habent ſegmenta diametri; ſed per theor. 45. ſegmenta ſuperficiei ſphæræ æquantur

ſeg-

mentis superficiei cylindricæ: ergo segmenta superficiei sphæræ, habent eam proportionem, quam habent segmenta diametri. Quod erat demonstrandum.

Nota hoc theorema tantum esse corollarium præcedentis, vt satis patet ex demonstratione allata.

Theorema XLVII.

CViuscumque sphæricæ portionis L A D superficies, æqualis est circulo, cuius radius est recta A D à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli, qui est portionis basis. *Archimedis prop.* 25.

Constructio. Sphæræ diameter C K, sit parallela portionis basi L D, ad quam perpendicularis sit altera spæræ diameter A Q, quæ sit axis cylindri I H, sphæræ circumscripti: præterea posita reliqua constructione theorematis 45 ducta sit recta Q D. *Fig.* 38.

Demonstratio. Quoniam angulus Q D A insistit arcui A C Q, qui est dimidia circuli circumferentia, *per theor.6.partis tertiæ ideæ* angulus Q D A rectus est: ergo, *per theor.* 10. *partis tertiæ ideæ*, Q A *ad* A D = A D *ad* G A: igitur, *per theor.* 25. circulus cuius radius Q A *ad* circulum cuius radius A D = Q A *ad* G A; sed etiam superficies cylindrica I H *ad* superficiem cylindricam F H = Q A *ad* G A: ergo circulus cuius radius Q A *ad* circulum cuius radius A D = superficiei cylindricæ I H *ad* superficiem cylindricam F H: atqui per corollarium theorematis 45. circulus cuius radius Q A = superficiei cylindricæ I H: ergo superficies cylindrica I H *ad* circulum cuius radius A D = superficiei cylindricæ I H *ad* superficiem cylindricam F H: ergo circulus cuius radius A D = superficiei cylindricæ F H; sed, *per theor.*45.etiam superficies cylindrica F H: = superficiei sphæricæ portionis L A D: ergo superficies sphericæ portionis L A D = circulo cuius radius A D. Quod erat demostrandum.

Theorema XLVIII.

OMnis sphera X, æqualis est cono Z, cuius altitudo P G, æqualis est radio sphæræ X, basis vero E L, æqualis est superficiei sphæræ X. *Archimedis prop.* 28.

Constructio. Quadrans maximi circuli sphæræ X, sit A B *K*, & *K* R C sit circumferentia maximi circuli eiusdem sphæræ; præterea circulus E L, sit basis coni Z, eiusque altitudo sit P G. *Fig.* 36. *&* 37.

Demonſtratio. Per aſſert. 3. theor. 1. cap. 1. A B *K* in *K* R C ductu quinto *ad* A B *K in K* B ductu quinto = *K* R C *ad K* B ≏ 8 A B *K ad* 2 *K* B 2, vt patet ex theor. 36: ſed, *per aſſert.* 3. *lemmatis cap.* 1. etiam A B *K in K* B ductu quinto *ad* A B *K in K* B ductu primo = 2 *K* B 2 *ad* 6 A B *K* ? ergo, *ex æquo*, A B *K in K* R C ductu quinto *ad* A B *K in K* B ductu primo = 8 A B *K ad* 6 A B *K*: ſed etiam, *per aſſert.* 2. *theor.* 1. *cap.* 1. A B *K in K* B ductu primo *ad* E L *in K* B ductu primo = A B *K ad* E L ≏ 6 A B *K ad* 48 A B *K*, vt patet ex hypotheſi & theor. 44. atque 36: ergo, *ex æquo*, A B *K in K* R C ductu quinto *ad* E L *in K* B ductu primo = 8 A B *K ad* 48 A B *K*: ſed, *per aſſert.* 2. *lemmatis cap.* 1. etiam E L *in K* B ductu primo *ad* E L *in K* B ductu tertio = 6 *ad* 2 ≏ 48 A B *K ad* 16 ABK: ergo, *ex æquo*, A B *K in K* R C ductu quinto *ad* E L *in K* B ductu tertio = 8 A B *K ad* 16 A B *K* ≏ 1 *ad* 2; ſed A B K *in K* R C ductu quinto = dimidiæ ſphæræ X, item quia per hypotheſim P G = B *K*, etiam E L *in* B *K* = pyramidi Z: ergo dimidia ſphæra X *ad* pyramidem Z = 1 *ad* 2: ergo ſphæra X = pyramidi Z. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XLIX.

Hemiſphærium X, coni Z, æqualem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt. *Archimedis prop.* 30.

Conſtructio. Hemiſphærij X, baſis ſit circulus C *K*, cuius circumferentia *K* R C, hemiſphærij altitudo ſit B A; Coni Z, baſis ſit E L, altitudo P G. *Fig.* 37. & 36.

Demonſtratio. Per aſſert. 3. theor. 1. cap. 1. A B *K in K* R C ductu quinto *ad* A B *K in* B A ductu quinto = *K* R C *ad* B A ≏ 16. A B *K ad* 2 A B 2, *vt patet ex hypotheſi & theor.* 36. Sed, *per aſſert.* 3. *lemmatis cap.* 1. etiam A B *K in* B A ductu quinto *ad* A B *K in* B A ductu primo = 2 A B 2 *ad* 6 A B K; ergo, *ex æquo*, A B K *in* K R C ductu quinto *ad* A B K *in* B A ductu primo = 16 A B *K ad* 6 A B K: ſed, *per theor.* 2. *cap.* 1. etiam A B K *in* B A ductu primo *ad* A B K *in* B A ductu tertio = 6 A B K *ad* 2 A B K: ergo, *ex æquo* A B *K in* K R C ductu quinto *ad* A B K *in* B A ductu tertio = 16 A B *K ad* 2 ABK: ſed, *per theor.* 1. *cap.* 1. etiã A B *K in* B A ductu tertio *ad* 4 ABK *in* B A ductu tertio = 2 A B K *ad* 8 ABK; ergo, *ex æquo*, A B K *in* K R C ductu quinto *ad* 4 AB K *in* B A ductu tertio = 16 A B K *ad* 8 A B K ≏ 2 *ad* 1: atqui A B K *in* K R C ductu quinto = hemiſphærio X, item 4 A B K in B A ductu tertio = pyramidi Z (quia per hypotheſim

E L

E L = 4 A B K, & P G = B A) ergo hemisphærium X *ad* pyramidem Z = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema L.

Cylindrus rectus, sphæræ cui circumscribitur, & soliditate & superficie tota sesquialter est. *Archimedis prop.* 32.

Constructio. Sphæra C K habeat diametrum C K, perpendicularem ad diametrum Q A; sitque Q A axis cylindri I H, sphæræ circumscripti, cylindri basis sit I P, circumferentia maximi circuli sphæræ sit K R C; quibus positis patet B A esse radium sphæræ, & A B *K* esse quadrantem maximi circuli sphæræ. *Fig.* 38.

Demonstratur prima pars. Per assert. 3. theor. 1. cap. 1. patet 4 A B K *in* 2 B A *ad* A B K *in* B A = 4 A B *K* *ad* A B *K* *in* 2 B A *ad* B A ♎ 4 *ad* 1 *in* 2 *ad* 1 ♎ 8 *ad* 1: sed ex hypothesi etiam patet 4 A B *K* *in* 2 A B ductu primo = I P *in* Q A ductu primo: ergo I P *in* Q A ductu primo *ad* A B K *in* B A ductu primo = 8 *ad* 1 ♎ 24 *ad* 3. atqui, *per theor.* 38. A B *K* *in* B A ductu primo *ad* A B *K* *in* *K* R C ductu quinto = 3 *ad* 8: ergo, *ex æquo*, I P *in* Q A ductu primo *ad* A B *K* *in* *K* R C ductu quinto = 24 *ad* 8: sed A B K *in* K R C ductu quinto *ad* 2 A B K *in* *K* R C ductu quinto = 8 *ad* 16: ergo, *ex æquo*, I P *in* Q A ductu primo *ad* 2 A B K *in* K R C ductu quinto = 24 *ad* 16 ♎ 3 *ad* 2; sed I P *in* Q A ductu primo = cylindro I H, item 2 A B K *in* K R C ductu quinto = sphæræ C *K*: ergo cylinder I H *ad* sphæram C K = 3 *ad* 2. Quod in prima parte asseritur.

Demonstratur secunda pars. K R C *in* B A ductu primo = B K *in* K R C ductu primo: sed *per lemma cap.* 1. B K *in* K R C ductu primo *ad* B *K* *in* *K* R C ductu quarto = 2 *ad* 1: ergo *K* R C *in* B A ductu primo *ad* B *K* *in* *K* R C ductu quarto = 2 *ad* 1: atqui *K* R C *in* A B ductu primo = curuæ superficiei cylindricæ C H, item B *K* *in* *K* R C ductu quarto = vni circulo maximo sphæræ C *K*: ergo curua superficies cylindrica C H *ad* vnum circulum maximũ sphæræ = 2 *ad* 1: ergo curua superficies cylindrica C H = duobus maximis circulis sphæræ: sed basis M H = vni circulo maximo sphæræ: ergo curua superficies cylindrica C H † basi M H = tribus circulis maximis sphæræ: sed curua superficies cylindrica C H † basi M H = dimidiæ superficiei totius cylindri I H; ergo dimidia superficies totius cylindri I H = tribus maximis circulis sphæræ: ergo tota superficies cylindri I H = sex maximis circulis sphæræ: atqui *per theor.* 44. tota superficies sphæræ C *K* = quatuor maximis circulis sphæræ: ergo tota superficies cylindri I H *ad* totam superficiem sphæ-

sphæræ C K = sex maximis circulis sphæræ *ad* quatuor maximos circulos sphæræ ≏ *6 ad* 4. igitur tota superficies cylindri I H *ad* totam superficiem sphæræ C K = *6 ad* 4. Quod erat demonstrandum.

Theorema LI.

Superficies sphæræ dupla est curuæ superficiei cylindri quadrati sphæræ inscripti. *Archimedis prop.* 33.

Fig. 39. Constructio. Sphæra M P habeat radium B P, sphæræ M P inscriptus cylinder quadratus sit I H, cylindri axis sit Q A, atque recta B K perpendicularis ad axem occurrat superficiei cylindri in K.

Demonstratio. Per theorema 44. superficies sphæræ M P = 4 circulis radio B P descriptis, item superficies sphæræ habentis radium B K = 4 circulis radio B K descriptis: ergo superficies sphæræ M P *ad* superficiē sphæræ habētis radiū B K = 4 circulis radio B P descriptis *ad* 4 circulos radio B K descriptos ≏ circulo radio B P descripto *ad* circulū radio B K descriptū: sed, *per theor.* 25. circulus radio B P descriptus *ad* circulū radio B K descriptum = B P 2 *ad* B K 2: ergo superficies sphæræ M P *ad* superficiem sphæræ habentis radium B K = B P 2 *ad* B K 2: sed, *per constructionem, & theorema,* 4. patet B P 2 *ad* B K 2 = 2 ad 1: ergo superficies sphæræ M P *ad* superficiem sphæræ habentis radium B K = 2 ad 1: atqui per theorema 45 etiam superficies sphæræ habentis radium B K = superficiei curuæ cylindri I H: ergo, *per theor.* 2. *partis quartæ ideæ*, superficies sphæræ M P *ad* superficiem cylindri I H = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

P. Andreas Taquet; post Archimedis theorema hic propositum: *quanti* (inquit) *hoc theorema fecerit Archimedes argumento est, quod tumulo suo sphæram cylindro inscriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortasse inter alia tam multa & præclara inuenta sua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & superficierum corpora ipsa continentium eadem esset atque vna rationalis proportio. In ipsa sphæra aliud mihi huius rei exemplum illustre sese obtulit. Deprehendi siquidem, quemadmodum sphæra ad cylindrum rectum, se ambientem (qui necessario æquilaterus erit) est tam soliditate quam superficie vt* 2 *ad* 3; *ita sphæram ad æquilaterum conum se ambientem & soliditate similiter & superficie eam habere proportionem quam* 4 *ad* 9. *Ex quo deinde illud consequitur, sesqui-*

al-

alteram proportionem ab Archimede in cylindro & sphæra repertam, in tribus solidis, sphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Vtriusque demonstrationem, pluraque alia theoremata nostra, quibus sphæræ natura mirabilis amplius innotescit sequentibus propositionibus comprehensa, subiungam. Hæc P. Taquet; ex quibus colliges cuius sint theoremata quæ hic subsequuntur, illa tamen Archimedea appello, quia ab ipso authore proponuntur inter selecta Archimedis theoremata: potissimum considerant conum æquilaterum sphæræ inscriptum aut circumscriptum; pro intelligentia coni qui dicitur æquilaterus, aut sphæræ quæ dicitur circumscripta aut inscripta cono æquilatero, vtilia erunt quæ sequuntur.

Sit semicirculus A D Q, cuius centrum B, atque semicirculo inscriptum sit triangulum A D Q, in quo latus Q A sit duplum lateris Q D: præterea ducta sit D G, vt angulus A G D rectus sit; his positis. *Fig. 42.*

Nota primo. 2 *ad* 1 = Q A *ad* Q D ≏ A D *ad* G D ≏ Q D *ad* Q G. Etenim per theor.6.partis 3. ideæ angulus A D Q rectus est: ergo, per theor.10. partis 3. ideæ, triangula A D Q, A G D, D Q G sunt similia: quare Q A *ad* Q D = A D *ad* G D ≏ Q D *ad* Q G: sed per hypothesim Q A *ad* Q D = 2 *ad* 1: ergo 2 *ad* 1 = Q A *ad* Q D ≏ A D *ad* G D ≏ Q D *ad* Q G.

Nota secundo. 4 *ad* 1 = Q A 2 *ad* Q D 2 ≏ A D 2 *ad* G D 2 ≏ Q D 2 *ad* Q G 2. Etenim per notam primam 2 *ad* 1 = Q A *ad* Q D ≏ A D *ad* G D ≏ Q D *ad* Q G: ergo 2 *in* 2 *ad* 1 *in* 1, hoc est 4 *ad* 1 = Q A 2 *ad* Q D 2 ≏ A D 2 *ad* G D 2 ≏ Q D 2 *ad* Q G 2.

Nota tertio. 4 *ad* 3 = Q A 2 *ad* A D 2 ≏ A D 2 *ad* G A 2 ≏ Q D 2 *ad* G D 2. Nam per theor.4. patet Q A 2 = Q D 2 † A D 2: sed per secundam notam, Q A 2 *ad* Q D 2 = 4 *ad* 1: ergo Q A 2 *ad* A D 2 = 4 *ad* 3. Similiter patet A D 2 *ad* G A 2 = 4 *ad* 3. item Q D 2 *ad* G D 2 = 4 *ad* 3.

Nota quarto. conum L A D, cuius latus A D; & baseos radius G D, esse conum æquilaterum; & per sphæram cono æquilatero L A D circumscriptam, intelligi sphæram eius radius est B A; denique per sphæram cono æquilatero L A D inscriptam, intelligi sphæram cuius radius est B G; hoc modo voces debere intelligi difficile non foret ostēdere, sed existimo superfluum, ad finem hic propositum.

Ex ijs quæ hic breuiter notaui, patent fundamentales proprietates, quibus innituntur reliquæ, quæ in sequentibus theorematibus proponuntur de cono æquilatero & sphæra cono æquilatero inscripta aut circumscripta; vt constabit ex demonstrationibus in quibus assumuntur proprietates hic annotatæ in superficiebus ex quibus se-

cun-

cundum P. Taquet producitur conus æquilaterus; aut sphæra cono æquilatero inscripta, aut circumscripta.

Theorema LII.

Sphærę superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem eam proportionem habet quā 4 *ad* 3. *Archimedis prop.* 34.

Fig. 39. Constructio, vt in theoremate 51.

Demonstratio. Vt in præcedenti theoremate ostensum est, superficies sphæræ M P *ad* superficiem sphæræ habentis radium B K = 4 *ad* 2: sed, *per theorema* 49. superficies sphæræ habentis radium B K *ad* totam superficiem cylindri I H = 2 *ad* 3. ergo, *ex æquo*, superficies sphæræ M P *ad* superficiem cylindi I H = 4 *ad* 3. Quod erat demonstrandum.

Theorema LIII.

Cviuscunque sectionis sphæricæ superficies, ad superficiem coni maximi inscripti, eam rationem habet quam coni latus ad basis radium. *Archimedis prop.*35.

Fig. 38. *vel* 40. Constructio. Sphærica portio sit L A D, eius baseos radius sit G D, conus maximus siue rectus portioni inscriptus, sit conus L A D: huius coni latus sit recta A D: Denique lineæ A D, D G, & Y, sint proportionales.

Demonstratio. Per theorema 25. circulus habens radium A D *ad* circulum habentem radium G D = A D 2 *ad* G D 2 ≏ A D *ad* Y, vt patet ex constructione: sed, *per theor.*43. etiam circulus habens radium G D *ad* superficiem coni L A D = G D *ad* A D ≏ Y *ad* G D, *vt patet ex constructione*: ergo *ex æquo*, circulus habens radium A D *ad* superficiem coni L A D = A D *ad* G D: atqui, *per theorema* 47. circulus habens radium A D = superficiei sphæricæ sectionis L A D: ergo superficies sphæricæ sectionis L A D *ad* superficiem coni L A D = A D *ad* G D. Quod erat demonstrandum.

Theorema LIV.

Hemisphærij superficies ad coni maximi siue recti inscripti superficiem eam proportionem habet quam in quadrato diameter

meter ad latus: ad superficiem vero coni similis circumscripti, vt latus in quadrato ad diametrum. *Archimedis prop.36.*

Constructio. Sit hemisphærium L A D, basis eius sit circulus L D, cuius radius G D, circumferentia D O L: conus rectus hemisphærio inscriptus sit L A D, eidem hemisphærio circumscriptus conus inscripto cono similis sit F H E, basis eius sit circulus F E, cuius radius G E, circumferentia E S F: Denique ducta sit recta G M quæ rectæ H E perpendiculariter occurrat in puncto M. Fig. 40.

Demonstratur prima pars. Per theor.53. superficies hemisphærij L A D *ad* superficiem coni L A D = A D *ad* D G: atqui, *ex hypothesi & constructione*, satis patet eiusdem quadrati diametrum esse A D, latus vero esse G D: ergo superficies hemisphærij L A D *ad* superficiem coni L A D = quadrati diametro *ad* latus. Quod in prima parte asseritur.

Demonstratur secunda pars. Ex hypothesi & constructione satis patet triangula G M E & D G A esse similia, & G M = G A, adeoque G E = A D. iam vero per assert.3. theor.1. cap.1. G E *in* E S F ductu secundæ classis *ad* E H *in* E S F ductu secundæ classis = G E *ad* E H: sed etiam E H *in* E S F ductu secundæ classis = E S F *in* E H ductu secundæ classis: ergo G E *in* E S F ductu secundæ classis *ad* E S F *in* E H ductu secundæ classis = G E *ad* E H: sed G E *in* E S F ductu secundæ classis = circulo radio G E descripto, item E S F *in* E H ductu secundæ classis = superficiei coni F H E: ergo circulus radio G E descriptus *ad* superficiem coni F H E = G E *ad* E H: sed circulus radio G E descriptus = circulo radio A D descripto (quandoquidem ostensum sit G E = A D) ergo circulus radio A D descriptus *ad* superficiem coni F H E = G E *ad* E H: atqui, *per theorema* 47. circulus radio A D descriptus = superficiei hemisphærij *L* A D: ergo superficies hemisphærij L A D *ad* superficiem coni F H E = G E *ad* E H: sed ex hypothesi patet eiusdem quadrati latus esse G E, & diametrum esse E H: ergo superficies hemisphærij L A D *ad* superficiem coni F H E = lateri quadrati *ad* diametrum. Quod in secunda parte asserebatur.

Theorema L V.

Superficies sphæricæ portionis conum æquilaterum capientis, dupla est superficiei eiusdem coni. *Archimedis prop.38.*

Constructio vt in theoremate 56. Fig. 41.

Demonstratio. Ex hypothesi & scholio theorematis 51. patet A D *ad*

D *ad* G D = 2 *ad* 1: sed, *per theorema* 53, superficies sphæricę portionis L A D *ad* superficiem coni L A D = A D *ad* G D: ergo superficies sphæricæ portionis L A D *ad* superficiem coni L A D = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema LVI.

Sphæræ superficies ad totam coni æquilateris sibi inscripti superficiem eam proportionem habet quam 16 *ad* 9. *Archimedis pop.* 39.

Fig. 41. Constructio. Sphæræ C K, inscriptus conus æquilaterus sit L A D: sphæræ diameter A Q, perpendiculariter occurrat basi ipsius coni in puncto G: quare baseos coni radius erit G D, tota baseos circumferentia sit D O L, sphæræ radius sit B K, tota circumferentia circuli radio B K descripti sit K R C.

Demonstratio. D O L *in* D A ductu secundæ classis = D A *in* D O L ductu secundæ classis: sed etiam D O L *in* D A ductu secundæ classis = superficiei coni L A D: ergo D A *in* D O L ductu secundæ classis = superficiei coni L A D: atqui etiam G D *in* D O L ductu secundæ classis = basi coni L A D: ergo tota superficies coni L A D = D A † G D *in* D O L ductu secundæ classis: sed quoniam, *per notam* 1. *scholij theor.* 51. D A = 2 G D, etiam D A † G D = 3 G D: ergo tota superficies coni L A D = 3 G D *in* D O L ductu secundæ classis: sed, *ex theoremate* 44. pâtet superficiem sphæræ C K = 4 B K *in* K R C ductu secundæ classis: ergo, *per assert.* 1. *theor.* 1. *cap.* 1. superficies sphæræ C K *ad* totam superficiem coni L A D = 4 B *K ad* 3 G D *in K* R C *ad* D O L ♎ 4 B *K ad* 3 G D *in* B *K ad* G D: sed, *per theor.* 17. *partis quartę ideæ*, 4 B *K ad* 3 G D *in* B *K ad* G D = 4 B *K in* B *K ad* 3 G D *in* G D ♎ 4 B *K* 2 *ad* 3 G D 2: ergo superficies sphæræ C *K ad* totam superficiem coni L A D = 4 B K 2 *ad* 3 G D 2: sed, *quoniam per notam tertiam scholij theorematis* 51. *B K* 2 *ad G D* 2 = 4 *ad* 3, etiam 4 B *K* 2 *ad* 3 G D 2 = 16 *ad* 9: ergo superficies sphæræ C K *ad* totam superficiem coni L A D = 16 *ad* 9; Quod erat demonstrandum.

Theorema L VII.

Fig. 42. Sphæræ superficies ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 9. *Archimedis prop.* 40.

Constructio. Sphęrę habenti radium B G, circumscriptus sit conus

conus æquilaterus L A D cuius baseos radius sit G D, sitque altera sphæra C K, circumscripta cono L A D, & radius eius sit B A.

Demonstratio. Per notam 2. scholy theorematis 51. patet G B 2 *ad* B A 2 = 1 *ad* 4: sed, *per theor.* 25. circulus radio G B *ad* circulum radio B A = G B 2 *ad* B A 2: ergo circulus radio B G *ad* circulum radio B A = 1 *ad* 4: ergo 4 circuli radio B G *ad* 4 circulos radio BA = 1 *ad* 4: ergo *per theor.* 44. superficies sphæræ habentis radium G B *ad* superficiem sphæræ habentis radium B A = 1 *ad* 4 ≏ 4 *ad* 16: sed, *per theor.* 56. etiam superficies sphæræ habentis radium B A *ad* totam superficiem coni L A D = 16 *ad* 9: ergo, *ex æquo*, superficies sphæræ habentis radium G B *ad* totam superficiem coni L A D = 4 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

Theorema LVIII.

Æquilateri coni sphæræ circũscripti tota superficies quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidẽ sphæræ. *Archimedis prop.* 41.

Demonstratio. Per theor. 56. tota superficies coni sphæræ circumscripti, *ad* superficiem sphæræ = 16 *ad* 9: sed, *per theor.* 57. sphæræ superficies *ad* totam coni inscripti superficiem = 9 *ad* 4: ergo, *ex æquo*, tota coni circumscripti superficies *ad* totam coni inscripti superficiem = 16 *ad* 4 ≏ 4 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema LIX.

Sphæra ad inscriptum sibi conum æquilaterum eam rationem habet quam 32 ad 9. *Archimedis prop.* 42.

Cõstructio. Sphæræ CK inscriptus conus æquilaterus sit LAD: sphæræ diameter AQ perpendiculariter occurrat basi ipsius coni in puncto G, quare baseos coni radius erit G D, tota baseos circumferentia sit D O L, baseos quadrans G O D, sphæræ radius B K sit perpendicularis ad radium B A, tota circumferentia circuli radio B K descripti sit K R C. Fig. 41.

Demonstratio. Per theor. 38. constat A B K *in* K R C ductu quinto *ad* A B K *in* BA ductu primo = 8 *ad* 3 ≏ 16 *ad* 6: sed A B K *in* K R C ductu quinto = dimidiæ sphæræ C K: ergo dimidia sphæra C K *ad* A B K *in* B A ductu primo = 16 *ad* 6: ergo tota sphæra C K *ad* ABK *in* B A ductu primo = 32 *ad* 6: ergo tota sphæra C K *ad* 4 A B K *in* B A ductu primo = 32 *ad* 24. Rursus, *per theor.* 2. *cap.* 1. patet 4 ABK *in*

in B A ductu primo *ad* 4 G O D *in* G A ductu tertio = 4 A B K *ad* 4 G O D *in* B A *ad* G A *in* 6 *ad* 2: sed (quoniam per theor. 25. 4 ABK *ad* 4 G O D = A B 2 *ad* G D 2 ♎ 24 *ad* 18, *vt* patet ex nota tertia scholy theorematis 51; item ex eadem 3. nota B A *ad* G A = 18 *ad* 27) etiam 4 A B K *ad* 4 G O D *in* B A *ad* G A *in* 6 *ad* 2 = 24 *ad* 18 *in* 18 *ad* 27 *in* 6 *ad* 2 ♎ 24 *ad* 9: ergo 4 A B K *in* B A ductu primo *ad* 4 G O D *in* G A ductu tertio = 24 *ad* 9; sed 4 G O D *in* G A ductu terrio = cono L A D. ergo 4 A B K *in* B A ductu primo *ad* conum L A D = 24 *ad* 9. Quandoquidem igitur tota sphæra C K *ad* 4 A B K *in* B A ductu primo = 32 *ad* 24, & insuper 4 A B K *in* B A ductu primo *ad* conum L A D = 24 *ad* 9: *per theorema* 5. *partis quartæ ideæ*, patet sphæram C K *ad* conum L A D = 32 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

Theorema LX.

Conus æquilaterus Sphæræ circumscriptus coni æquilateri eidem sphæræ inscripti octuplus est, *Archimedis prop.* 43.

Fig. 42. Constructio. Sphæræ habenti radium B G inscriptus sit conus æquilaterus H I M, eidem sphæræ circumscriptus conus æquilaterus sit L A D, denique cono L A D circumscripta sphæra habeat radium B A.

Demonstratio. Ex theor. 59. patet sphæram radio BA *ad* conum L A D = sphæræ radio B G *ad* conum H I M: ergo permutando sphęra radio B A *ad* sphæram radio B G = cono L A D *ad* conum H I M: sed per theor. 35. sphæra radio B A *ad* sphæram radio B G = B A 3 *ad* B G 3 ♎ 8 *ad* 1. vt patet ex scholio theor 51. ergo conus L A D *ad* conum H I M = 8 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema LXI.

Sphæra ad circumscriptum sibi conum æquilaterum & soliditate & superficie eam proportionem habet quam 4 *ad* 9. *Archimedis* prop. 44.

Fig. 42. Constructio. Sphæræ habenti radium B G, sit circumscriptus conus æquilaterus L A D, cui circumscripta sit altera sphæra habens radium B A.

Demonstratur prima pars: Per theor. 35. sphæra habens radium B G *ad* sphærā habentem radium B A = 1 ad 8 ♎ 4 ad 32. sed, *per theor.*

theor. 59. sphæra habens radium B A *ad* conum L A D = 32 *ad* 9: ergo, *ex æquo*, sphæra habens radium B G *ad* conum L A D = 4 *ad* 9. vt asseritur in prima parte.

Demonstratur secunda pars: Quoniam per notam primam scholy theorematis 51. constat B G *ad* B A = 1 *ad* 2, etiam per theor. 25. quatuor circuli habentes radium B G *ad* quatuor circulos habentes radium B A = 4 ad 16: ergo per theor. 44. etiam superficies sphæræ habentis radium B G *ad* superficiem sphæræ habentem radium B A = 4 *ad* 16: sed, *per theor.* 56. superficies sphæræ habentis radium BA *ad* totam superficiem coni L A D = 16 *ad* 9: ergo, *ex æquo*, superficies sphæræ habentis radium B G *ad* totam superficiem coni L A D = 4 *ad* 9. Vt in secunda parte asseritur.

Theorema LXII.

Conus æquilaterus sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus sphæræ similiter circumscriptus, & ipsa sphæra, eamdem proportionem continuant, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam. *Archimedis prop.* 45. *Fig.* 43.

Constructio. Sit conus æquilaterus L A D, cui inscripta sit sphæra habens radium B G, atque eidem sphæræ circumscriptus sit cylinder I H.

Demonstratio. Per theor. 61. tam soliditate quam tota superficie conus æquilaterus L A D *ad* sphæram habentem radium B G = 9 *ad* 4: sed per theor. 50. tam soliditate quam tota superficie sphæra habens radium B G *ad* cylindrum I H = 4 ad 6: ergo *ex æquo* tam soliditate quam tota superficie conus æquilaterus L A D *ad* cylindrum I H = 9 *ad* 6; præterea per theor. 50. tam soliditate quam tota superficie cylinder I H *ad* sphæram habentem radium B G = 6 *ad* 4: atqui numeri 9, 6, 4, continuant eamdem rationem: ergo etiam conus L A D, cylinder I H, & sphæra habens radium B G, eamdem rationem continuant, tam quoad soliditatem quam quoad totam superficiem. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

IN præcedenti exercitatione logistica, habes non pauca ex præcipuis Euclidis atque Archimedis theorematibus, logisticis discursibus stabilita; ex hac logistica exercitatione obseruare poteris, quo-

modo meos instituam in rebus Geometricis: licet enim hic proposuerim demonstrationes P. Marcelli, non solus ipse composuit atque demonstrauit proposita theorema, plures alij idem præstiterunt: etenim omnibus communis occupatio est, in formandis demonstrationibus sese exercere: & licet non nisi vno ab hinc anno lucem viderit nostra logistica, atque adeò inceperim hac methodo meos instituere, plures tamen numero qui idem possint quod hic ab vno factum vides: atque ex his pluribus aliqui ante annum nihil prorsus sciuerant in Mathematicis. An alia Methodo tam breui tempore, tantus progressus fiat in rebus Mathematicis, statuant, qui in efformandis demonstrationibus Geometricis versati sunt, atque adeo vsu didicerunt, quo tempore, quo labore, acquiratur ea peritia quæ requiritur ad examinandas aut stabiliendas veritates Geometricas.

Licet in methodo nostra (in qua figuræ inscriptæ, atq, circũscriptæ vix vllũ vsũ habent) vtilius fuisset, aliter proponere theoremata plurima cõtent: præcedẽti exercitatione: singula tamen proposita sunt eo modo quo proponuntur à P. Andrea Taquet, vt demonstrationes logisticæ quibus hic probantur, cõmodius conferri possint cum demonstrationibus quibus alia methodo stabiliuntur, vel ab Euclide, vel ab Archimede, vel ab alijs qui horum authorum obscurioribus scriptis lucem afferre conati sunt; melius enim statui potest quid de duplici atque diuersa Geometrisandi methodo statuendum sit, quando eędẽ planè veritates vtraque methodo demonstratæ considerantur, atque simul conferuntur. Si aliquis pręcedentis exercitationis demonstrationes logisticas cum alijs earumdem veritatum demonstrationibus conferat, eum rogatum velim, vt præter alias reflexiones cuilibet liberas, aduertat; primo quomodo apud alios singula propemodum theoremata immediatè aut mediatè innitantur principio Euclideo, asserenti ęqualia esse quæ sibi super imposita congruunt, quod ex nostris principijs expungendum putauimus, propter rationes insinuatas cap. 12. partis 2. huius ideæ. Secundo in qua methodo magis rigorosè obseruetur ars syllogistica, atque minus vsitatæ sint reductiones ad impossibile. Tertio in qua methodo præter veritates inter principia expresse propositas, pauciora alia principia in ipso decursu assumantur. Quarto in qua methodo difficiliores, atque magis implicatę constructiones requirantur, ad demonstrandas propositas veritates. Quinto in qua methodo necessarię sint prolixiores, atque adeo molestiores diuersarum propositionum series, vt à prioribus ad posteriores perueniatur. Omitto cętera; illud vt opinor negabit nemo, Mathematicas veritates facilius percipi, atque vtilius intelligi, quo magis immediatè deducta sunt ex ipsis principijs: atque per hoc

etiam

etiam melius innotescere principiorum vsum, atque vtilitatem; in nostra methodo singulæ veritates propositæ in præcedenti exercitatione logistica propemodum immediatè duci poterant ex ipsis principijs: an illud succederet in alia methodo, statuant alij: vt constet quomodo hoc succedat in nostra methodo, placet hic resumere theorema quod inter proposita postremum est, & reliquorum omnium maximè arduum, atque à principijs maximè remotum: quodque, ex mente P. Taquet, reliquorum omnium præstantissimum est: illud tamen meis verbis hic propono, abstrahendo scilicet à figuris quæ dicuntur inscriptæ aut circumscriptæ, quarum apud nos parua vtilitas, & in eodem theoremate vt hic proponitur maiorem apprehendo vtilitatem: deinde propositum theorema demonstro, ita vt non assumam vllum theorema præcedentis logisticæ exercitationis.

Lemma.

IN triangulo A G D, Latus A D, sit duplum lateris G D, atque angulus A G D rectus sit.

Dico G D = 1 R 1 * 3, item A D = 2 R 1 * 3, supposito quod A G = 3. *Fig.* 44.

Constructio. Ducta sit recta G Y, quæ rectæ A D perpendiculariter occurrat in Y: atque A D 2 = 12.

Demonstratio. Per theor. 10. partis tertię ideæ, A D *ad* A G = A G *ad* A Y, item A D *ad* G D = G D *ad* Y D: ergo, *per assert.* 5. *theor.* 1. *cap.* 1. etiam A D *in* A Y = A G 2, item A D *in* Y D = G D 2: ergo A G 2 † G D 2 = A D *in* A Y *&* † A D *in* Y D ♎ A D *in* A Y † Y D: sed A Y † Y D = A D: ergo A D 2 † G D 2 = A D *in* A D ♎ A D 2. Deinde quia per hypothesim A D *ad* G D = 4 *ad* 2: etiam A D 2 *ad* G D 2 = 16 *ad* 4 ♎ 12 *ad* 3: sed, *per constructionem*, A D 2 = 12: ergo G D 2 = 3: cum igitur ostensum sit A D 2 = A G 2 † G D 2, & insuper A D 2 = 12, item G D 2 = 3: patet 12 = A G 2 † 3: ergo 12 — 3 = A G 2: ergo A G 2 = 9: sed etiam G D 2 = 3: ergo A G 2 *ad* G D 2 = 9 *ad* 3: ergo A G *ad* G D = 1 R 1 * 9 *ad* 1 R 1 * 3 ♎ 3 *ad* 1 R 1 * 3: atqui, *per hypothesim*, G D *ad* A D = 1 *ad* 2 ♎ 1 R 1 * 3 *ad* 2 R 1 * 3: ergo supposito quod A D = 3: etiam G D = 1 R 1 * 3, item A D = 2 R 1 * 3. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema LXIII.

Fig. 44. SIt X conus æquilaterus, Z sit cylinder quadratus, P sit sphæra, præterea axis coni X tam ad axem cylindri Z, quam ad axem sphæræ P, habeat rationem sesquialteram.

Dico corpora X, Z, P, continuare eamdem rationem sesquialteram, tum quoad soliditatem, tum quoad superficiem totam. Hoc est solidum X ad solidum Z = 6 ad 4. item solidum Z ad solidum P = 6 *ad* 4. item totam superficiem solidi X ad totam superficiem solidi Z = 6 *ad* 4. Denique totam superficiem solidi Z *ad* superficiem solidi P = 6 ad 4.

Constructio. Basis coni æquilateri X, habeat diametrum L D, circumferentiam D O L, axis siue altitudo coni X sit G A; basis cylindri Z, habet diametrum I M, radium E M, tota baseos circumferentia sit M R I, eiusdem cylindri altitudo æqualis axi sit M H; sphæræ P, diameter siue axis sit C F, radius sit B F, tota circumferentia circuli radio B F descripti, sit F K C, quadrans circuli radio B F descripti sit N B F: denique G A = 3.

Si in demonstrationibus alicui dubium occurrat circa illationes in quibus desunt citationes, consulendo, vel hypothesim, vel lemma hic præmissum, vel denique theor. 17. partis 4. ideę inueniet illas esse legitimas.

Demonstratur prima pars. Per primum axioma hypotheticum cap. 13. partis 2 ideę, G D *ad* E M = D O L *ad* M R I: ergo per assert. 5. theor. 1. cap. 1. etiam G D *in* D O L ductu secundę classis *ad* E M *in* M R I ductu secundæ classis = G D 2 *ad* E M 2: sed G D *in* D O L ductu secundæ classis = circulo L D, item E M *in* M R I = circulo I M: ergo circulus L D *ad* circulum I M = G D 2 *ad* E M 2: sed per assert. 2. theor. 2. cap. 1. etiam circulus L D *in* G A ductu tertiæ classis *ad* circulum I M *in* M H ductu primæ classis = circulo L D *ad* circulum I M *in* G A *ad* M H *in* 2 *ad* 6: ergo circulus L D *in* G A ductu tertiæ classis ad circulum I M *in* M H ductu primæ classis = G D 2 *ad* E M 2 *in* G A *ad* M H *in* 2 *ad* 6 ♎ 3 *ad* 1 *in* 3 *ad* 2 *in* 2 *ad* 6 ♎ 3 *in* 3 *in* 2 *ad* 1 *in* 2 *in* 6 ♎ 18 *ad* 12 ♎ 6 *ad* 4: ergo circulus L D *in* G A ductu tertiæ classis *ad* circulum I M *in* M H ductu primę classis = 6 *ad* 4: sed circulus L D *in* G A ductu tertiæ classis = solido X, itē circulus I M *in* M H ductu primæ classi = solido Z: ergo solidū X *ad* solidum Z = 6 *ad* 4. Vt in prima parte asseritur.

Demonstratur secunda pars: Per theor. 3. cap. 1. 2 E M 2 *in* M R I ductu secundæ classis *ad* 2 N B F *in* F K C ductu quartæ classis =

2 *ad*.

1 *ad* 2 *in* 2 E M 2 *ad* 2 N B F *in* M R I *ad* F K C *in* 6 N B F *ad* 2 B F ≏ 1 *ad* 2 *in* 2 *ad* 2 N B F *in* 1 *ad* 1 *in* 6 N B F *ad* 2 ≏ 1 *in* 2 *in* 1 *in* 6 N B F *ad* 2 *in* 2 N B F *in* 1 *in* 2 ≏ 12 N B F *ad* 8 N B F ≏ 6 *ad* 4: sed 2 E M 2 *in* M R I ductu secundæ classis = solido Z, item 2 N B F *in* F K C ductu quartę classis = solido P: ergo solidum Z *ad* solidum P = 6 *ad* 4. Vt in secunda parte asseritur.

Demonstratur tertia pars. Per theor. 2. cap. 1. D O L *in* D A ductu secundæ classis *ad* M R I *in* M H ductu primæ classis = D O L *ad* M R I *in* D A *ad* M H *in* 1 *ad* 2 ≏ G D *ad* E M *in* 2 R 1 * 3 *ad* 2 *in* 1 *ad* 2 ≏ 1 R 1 * 3 ad 1 *in* 2 R 1 * 3 *ad* 2 *in* 1 *ad* 2 ≏ 1 R 1 * 3 *in* 2 R 1 * 3 *in* 1 *ad* 1 *in* 2 *in* 2 ≏ 6 *ad* 4: sed D O L *in* D A ductu secundæ classis = superficiei curuæ solidi X, item M R I *in* M H ductu primæ classis = superficiei curuæ solidi Z: ergo superficies curua solidi X *ad* superficiẽ curuam solidi Z = 6 *ad* 4. Rursus quia per 1 axioma hypotheticum cap. 13. partis 2. ideæ, G D *ad* E M = D O L *ad* M R I per assert. 5. theor. 1. cap. 1. etiam G D *in* D O L ductu secundæ classis *ad* E M *in* M R I ductu secundæ classis = G D 2 *ad* E M 2 ≏ 3 *ad* 1: sed G D *in* D O L ductu secundæ classis = planæ superficiei solidi X, itẽ E M *in* M R I ductu secundæ classis = vni superficiei planę solidi Z: ergo superficies plana solidi X *ad* vnam superficiem planam solidi Z = 3 *ad* 1: ergo superficies plana solidi X *ad* duas superficies planas solidi Z = 3 *ad* 2 ≏ 6 ad 4; quoniam igitur curua superficies solidi X *ad* curuam superficiem solidi Z = 6 *ad* 4, & insuper plana superficies solidi X *ad* planas superficies solidi Z = 6 *ad* 4, tota superficies solidi X *ad* totam superficiem solidi Z = 6 *ad* 4. Vt in tertia parte asseritur.

Demonstratur quarta pars. E M *in* M R I ductu secundæ classis = vni basi cylindri Z: ergo 2 E M *in* M R I ductu secundæ classis = duabus basibus cylindri Z: ergo per lẽma cap. 1. etiã E M *in* M R I ductu primę classis = duabus basibus cylindri Z: sed etiam M R I *in* 2 E M ductu primæ classis = curuæ superficiei cylindri Z: ergo 3 E M *in* M R I ductu primæ classis = toti superficiei cylindri Z: sed M R I = 4 N F: ergo tota superficies cylindri Z = 4 N F *in* 3 E M ductu primæ classis: sed etiam tota superficies sphæræ P = 2 N F *in* 4 N F ductu quartæ classis: ergo tota superficies cylindri Z *ad* totam superficiem sphæræ P = 4 N F *in* 3 E M ductu primæ classis *ad* 2 N F *in* 4 N F ductu quartæ classis: sed per theor. 2. cap. 1. 4 N F *in* 3 E M ductu primę classis *ad* 2 N F *in* 4 N F ductu quartæ classis = 4 N F *ad* 2 N F *in* E M *ad* 4 N F *in* N F *ad* E M ≏ 4 *ad* 2 *in* 3 E M *ad* 4 N F *in* N F *ad* E M ≏ 12 E M *ad* 8 N F *in* N F *ad* E M ≏ 12 E M *in* N F *ad* 8 N F *in* E M ≏ 12 E M *in* N F *ad* 8 E M *in* N F ≏

12 *ad*

12 *ad* 8 = 6 *ad* 4 : ergo tota superficies cylindri Z *ad* totam superficiem sphæræ P = 6 *ad* 4. Vt in quarta parte asseritur.

Corollarium I.

EX proposito theoremate, atque eius demonstratione, constat, quod proportionem sesquialteram habeat.

Primo. Conus æquilaterus X *ad* cylindrum quadratum Z. Est prima pars theorematis hic propositi. Item prima pars theorematis 61.

Secundo. Cylinder quadratus Z *ad* sphæram P. Est secunda pars theorematis hic propositi. Item secunda pars theorematis 50.

Tertio. Tota superficies coni æquilateri X *ad* totam superficiem cylindri quadrati Z. Est tertia pars theorematis hic propositi. Item secunda pars theorematis 61.

Quarto. Tota superficies cylindri quadrati X *ad* superficiem sphæræ P. Est quarta pars theorematis hic propositi. Item secunda pars theorematis 50.

Quinto. Superficies curua coni æquilateri X ad superficiem curuā cylindri quadrati Z. Constat ex demonstratione hic allata pro tertia parte propositi theorematis.

Sexto. Superficies plana, siue basis coni æquilateri X *ad* superficies planas, siue bases cylindri quadrati Z. Constat ex demonstratione hic allata pro tertia parte propositi theorematis.

Septimo superficies curua coni æquilateri X *ad* superficiem sphæræ P. Cum enim ex demonstratione quartæ partis propositi theorematis satis pateat superficiem curuam cylindri X = superficiei sphæræ P, ex quinta assertione, patet hæc septima assertio.

Octauo. Medietas totius superficiei coni æquilateri X ad totam superficiem dimidiæ sphæræ P. Etenim ex tertia assertione tota superficies coni X *ad* totam superficiē cylindri Z = 6 *ad* 4: ergo medietas totius superficiei coni X *ad* medietatem totius superficiei cylindri Z = 6 *ad* 4: sed medietas totius superficiei cylindri Z = toti superficiei dimidiæ sphæræ P (quia medietas curuæ superficiei cylindri X = curuæ superficiei dimidiæ sphæræ P, & insuper vna basis cylindri X = basi dimidiæ sphæræ P) ergo medietas totius superficiei coni X *ad* totam superficiem dimidiæ sphæræ P = 6 *ad* 4.

Nono. Quadratum factum supra rectam L D quæ est diameter baseos coni X *ad* quadratum factum supra rectam I H, quæ est diameter

meter quadrati à quo cylinder I H quadratus appellatur. Nam ex demonstratione lemmatis satis patet I H 2 = I M 2 † M H 2 ≏ 2 I M 2: sed quoniam ex demonstratione partis tertiæ theorematis hic propositi L D 2 *ad* I M 2 = 3 *ad* 1, etiam L D 2 *ad* 2 I M 2 = 3 *ad* 2 ≏ 6 *ad* 4: ergo L D 2 *ad* I H 2 = 6 *ad* 4.

Corollarium II.

EX proposito theoremate, atque eius demonstratione, veluti corollaria sequuntur non pauca theoremata, quæ in præcedenti exercitatione conducunt ad illud, quod inter reliqua vltimum est, atque præcipuum; sequitur enim.

Primo. Quod de quouis triangulo rectangulo A G D verum sit, A D 2 = A G 2 † G D 2; satis patet ex demonstratione lemmatis; atque hoc est quod docet theorema 4. *Fig.* 44.

Secundo. Quod quiuis circulus habens radium G D ad quemuis circulum habentem radium E M = G D 2 *ad* E M 2; patet ex demonstratione partis tertiæ propositi theorematis; atque hoc idem est quod docet theorema 25.

Tertio. Cuiusuis coni recti X superficiem curuam ad basim eiusdem coni habere illam proportionem, quam coni latus A D habet ad basis radium G D; satis patet ex demonstratione tertiæ partis propositi theorematis; atque hoc idem docetur theoremate 43.

Quarto. Superficiem cuiusuis sphæræ P, æquari quatuor maximis circulis eiusdem sphæræ; satis manifestum est ex demonstratione partis quartæ propositi theorematis; atque illud idem est quod docet theorema 44.

Quinto. Quod cylinder quadratus Z, habens axem æqualem axi sphæræ P, etiam habeat curuam superficiem æqualem superficiei sphæræ P. Satis patet ex demonstratione partis quartæ propositi theorematis; atque illud idem docet theorema 45.

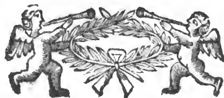
Sexto. Quod cylinder quadratus Z, habens axem æqualem axi sphæræ P, & soliditate & tota superficie sit sesquialter sphæræ P; patet ex tertia & quarta parte propositi theorematis; idem docet theorema 50.

Septimo. Quod superficies sphæræ P, ad totam superficiem coni æquilateri X, cuius axis sit sesquialter axeos sphæræ P, eam proportionem habeat, quam 4 *ad* 9. Etenim per quartam partem propositi theorematis, superficies sphæræ P ad totam superficiem cylindri Z = 4 *ad* 6: sed per tertiam partem eiusdem theorematis, tota

ſuperficies cylindri Z ad totam ſuperficiem coni X = 6 *ad* 9: ergo ex æquo ſuperficies ſphæræ P ad totam ſuperficiem coni X = 4 *ad* 9; conuenit cum theoremate 57.

Octauo. Quod ſphæra P ad conũ X, cuius axis ſit ſeſquialter axeos ſphæræ P, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 9. Etenim per ſecundam partem propoſiti theorematis ſphæra P ad cylindrum Z = 4 *ad* 6: ſed etiam per primam partem eiuſdem theorematis, cylinder Z ad conum X = 6 *ad* 9: ergo, ex æquo, ſphæra P ad conum X = 4 *ad* 9; conuenit cum theoremate 60.

Aliorum Mathematicorum curæ permitto, ſtatuere, quid ex pluribus in hoc ſcholio breuiter inſinuatis inferri poſſit in fauorem noſtræ logiſticæ, aut methodi qua vtitur; contra hanc methodum, atque toto hoc capite propoſitas demonſtrationes obijciet fortaſſis aliquis, non leuem logiſticæ noſtræ defectum eſſe, in illa adhiberi principia hypothetica; ex quo fit, quod demonſtrationes adhibitæ in hac quinta parte, rigoroſæ non ſint. Qui hoc mihi obijcit, vel eſt ex eo genere Mathematicorum qui magis aſſueti credere, quam intelligere: non tam ratione aut diſcurſu perſuaſi, quam innixi authoritati, aſſentiuntur propoſitionibus Mathematicis; vel certe eſt ex eo genere Mathematicorum, qui ratiocinio ducuntur, atque vnicè attendunt, quid, aut naturæ lumen, aut diſcurſus ſuadeat. Si ſecundum rogo vt paulo attentius perlegat huius ideæ reflexionem 4 partis primæ; præterea caput 12. & 13. ſecundæ partis; denique quartæ partis caput primum. Si primum, ex eorumdem capitum lectione fortaſſis percipiet, etiam ex aliorum ſententia, antiquum, atque cæteris Mathematicis ſatis communem defectum eſſe, qui in obiectione indicatur.



IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ PARS SEXTA

ARGVMENTVM.

Conus, plana superficie diuersimode sectus in duas partes, exhibere potest quinque superficies inter se diuersas: nimirum triangulum, circulum, ellipsim, parabolam, & hyperbolam. Non assero vsu receptum esse singulas illas superficies appellare conicas sectiones, omnes tamen et solas istas figuras appello sectiones conicas: quia de singulis æqualiter verum est, quod produci siue exhiberi possint, à cono plana superficie secto in duas partes: quod de nullis alijs superficiebus verificatur; de prædictis quinque conicis sectionibus aliqua traduntur in hac sexta parte: quibus adduntur nonnulla spectantia ad parallelogramma vel triangula quæ à nobis appellantur cylindrica, atque aliquam affinitatem habent cum sectionibus conicis. Quid in his Geometricis contemplationibus prosit nostra logistica, apparebit ex capitibus quæ subsequuntur.

CAPVT I.

Proponuntur aliquæ definitiones, siue expositiones terminorum, quibus vtimur in tradendis de conicis sectionibus, aut cylindricis parallelogrammis atque triangulis.



Nter superficies planas quarum contemplatione occupatur Geometria, præcipuę sunt, triangulum, circulus, ellipsis, parabola, & hyperbola; enumeratis quinque superficiebus planis, commune est, quod exhibeantur à partibus coni plana superficie secti in duas partes, idque nulli alteri planæ superficiei conuenit, vt constabit ex dicendis subsequenti capite; hinc quiquid sit de propria,

aut apud alios vsitata significatione conicæ sectionis, nos per conicam sectionem intelligimus superficiem planam, quæ inuenitur in partibus coni plana superficie diuisi in duas partes: quare conica sectio adæquatè diuiditur in triangulum, circulum, ellipsim, parabolam, atque hyperbolam. Quemadmodum ad inuestigandas trianguli aut circuli proprietates, inutile est expendere, quod illæ duæ figuræ exhibeantur à partibus coni plano diuisi aut secti, ita ad investigandas proprietates ellipseos, parabolæ, aut hyperbolæ, videtur planè superfluum considerare eam originem quam habere possunt ex cono: præsertim quia præter conū inueniuntur alia corpora, quæ plana superficie secta, exhibeant prædictas superficies, quas sectiones conicas appellamus; quod etiam constabit ex subsequenti capite.

Ex quinque enumeratis conicis sectionibus, solum triangulum & circulum considerat Euclides in suis elementorum libris: de reliquis tribus conicis sectionibus aliqua accepimus ab Archimede: sed longe plura ab Apolloneo Pergæo; hi exordium sumunt à cono, vt considerent proprietates ellipseos, parabolæ, atque hyperbolæ; & in definitionibus istarum figurarum adhibent originem quam habere possunt ex cono secto plana superficie. Ego quidem, vt par est, veneror atque suspicio, hæc & alia prædictorum maximi nominis authorum placita, non ideo tamen mihi illicitum puto, aut ab ipsis vsitatos aliquos loquendi modos negligere, aut aliquos non vsitatos assumere, aut aliter recedere, quod vbi facio, certe non facio vlla necessitate cogente, sed suadente commoditate. Etenim, vt cætera taceam, apud prædictos authores visitatas voces singulas intelligibiliter exponere longum foret; aliunde eas voces cognitas supponere, nihil aliud esset, quam nostra scripta inutilia reddere apud eos, ad quos scribo.

Fig. 45. Ex ijs quæ capite 5. secundæ partis Ideæ dicta sunt de angulis, satis constat, quid sit angulus rectilineus, nimirum, apertura quam habent duæ rectæ lineæ simul concurrentes: quare supposito quod lineæ X A & B A singulæ rectæ sint, angulus X A B erit rectilineus, & vertex eius erit punctum A.

Fig. 46. Angulus circularis, vocetur, apertura quam habet linea circularis cum sua diametro; quare supposito quod linea X A, sit arcus circuli, habentis diametrum A B, angulus X A B erit angulus circularis, vertex eius erit punctum A.

Fig. 47. Angulus ellipticus, dicatur, apertura quam habet linea elliptica, cum suo axe; quare supposito quod linea X A sit linea elliptica cuius axis sit A B, etiam angulus X A B erit angulus ellipticus, & vertex eius erit punctum A.

Angu-

Angulus parabolicus, appelletur, apertura quam habet linea parabolica cum suo axe; hinc supposito quod linea X A sit linea parabolica habens axem A B, augulus X A B erit angulus parabolicus, atque eius vertex erit punctum A. Fig. 48.

Angulus hyperbolicus, dicatur, apertura quam linea hyperbolica habet cum suo axe; itaque supposito quod linea X A sit linea hyperbolica habens axem A B, angulus X A B erit angulus hyperbolicus, & vertex eius erit punctum A. Fig. 49.

Ex quinque angulis de quibus hic egimus, vnus rectilineus est; quia constituitur à duabus rectis lineis: reliqui sunt mixtilinei, quia constituuntur à duabus lineis, quarum vna curua, altera recta est. Cuiusuis anguli hic propositi sinus rectus, siue sinus primus, aut simpliciter sinus, appelletur, recta linea, à duobus anguli lateribus terminata, atque perpendicularis ad rectam lineam quæ anguli latus est. In singulis figuris in quibus paulo ante expositos angulos repræsentauimus, angulorum X A B sinum primum repræsentat, tam recta D C, quã recta F E. Similiter cuiusuis anguli hic propositi sinus secundus, vocetur, distantia verticis anguli à sinu primo; hinc angulorum X A B, sinus secundus erit, tum recta A C, tum etiam recta A E. Pari modo cuiusuis anguli hic propositi radius, dicatur, distantia verticis anguli à remotiori extremitate primi sinus. Itaque angulorum X A B radium repræsentabit, tam recta A D, quàm recta A F. Eiusdem anguli radius, sinus primus, & sinus secundus, sibi correspondere dicuntur: si sint latera eiusdem trianguli rectanguli; hinc radius A F, sinus primus F E, & sinus secundus A E, sibi correspondent: verum radius F E non correspondet sinui primo D C. In his definitionibus non destruimus, sed tantum ad maiorem amplitudinem extendimus, quæ de rectilinei anguli radijs, aut sinibus, dicta sunt capite 5. partis secundæ Ideæ; & quidquid sit de linea quam prædicto capite appellauimus axem anguli rectilinei, cuiusuis anguli mixtilinei hic propositi axem, dicimus, rectam lineam quæ anguli mixtilinei latus est; atque adeo cuiusuis anguli mixtilinei X A B, axis erit recta linea A B.

Præmissis paulo ante traditis definitionibus angulorum, linearumque ad hos angulos spectantium, pergo ad aliquas proprietates singulis ex propositis angulis conuenientes, ac proprias: quas vt breuius & intelligibilius exponam, ponatur subsequens hypothesis.

Ex puncto A, rectæ lineæ A B, per idem planum excurrat linea A X, cuius duo quæuis puncta sint D & F: atque ex punctis D & F, ductæ sint rectæ D C & F E, perpendiculares ad rectam A B, atque illi

illi occurrentes in punctis C & E. Posita hac hypothesi, ex pluribus, qui possibiles sunt, noto quinque diuersos casus, qui possunt occurrere, pro quibus seruiunt quinque figuræ, quæ 44. immediate subsequuntur.

Fig. 45. Primus casus sit, vt D C *ad* F E = A C *ad* A E. In omni & solo hoc primo casu, linea X A erit recta: & angulus X A B erit rectilineus, vt constabit ex theoremate primo subsequentis capitis.

Fig. 46. Secundus casus sit, vt D C 2 = A C *in* C B. In omni & solo hoc secundo casu angulus X A B erit angulus circularis, & linea X A erit arcus circuli habentis diametrum A B; hoc demonstratur theoremate secundo subsequentis capitis.

Fig. 47. Tertius casus sit, vt D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B, & tamen D C 2 non = A C *in* C B. In omni & solo hoc tertio casu angulus X A B erit angulus ellipticus: & linea X A erit linea elliptica habens axem A B. Hoc verum esse constabit ex definitione lineæ ellipticæ mox tradenda.

Fig. 48. Quartus casus sit, vt D C 2 *ad* F E 2 = A C *ad* A E. In omni & solo hoc quarto casu angulus X A B est parabolicus, & linea X A est linea parabolica habens axem A B. Hoc verum esse constabit ex definitione lineæ parabolicæ mox tradenda.

Quintus casus sit, vt recta B A produci possit vsque in R, adeo vt D C 2 *ad* F E 2 = R C *in* C A *ad* R E *in* E A. In omni & solo hoc quinto casu, angulus X A B est angulus hyperbolicus, & linea X A est linea hyperbolica habens axem A B. Hoc verum esse constabit ex definitione lineæ hyperbolicæ mox tradenda.

In præcedentibus partibus huius Ideæ non semel egimus de recta linea, & de linea circulari, atque eius diametro: in quem finem prius expositæ sunt definitiones, quæ conueniunt aut rectæ lineæ, aut lineæ circulari, aut diametro lineæ circularis: quæ definitiones coniunctæ cum paulo ante traditis definitionibus anguli rectilinei aut circularis, subministrant omnia determinatiua requisita ad statuendum quandonam angulus aliquis sit rectilineus, aut circularis; huiusmodi determinatiua requisita ad statuendum quandonam angulus aliquis sit ellipticus, parabolicus, aut hyperbolicus, hactenus à nobis proposita non sunt: quia nusquam statuimus, quæ, aut quales sint lineæ, quæ appellantur ellipticæ, parabolicæ, hyperbolicæ, aut istarum linearum axes: in hunc finem adhibemus proprietates annotatas in tribus posterioribus casibus. Itaque curua linea X A, vocetur linea elliptica habens axem A B, si angulus X A B habeat proprietatem annotatam in tertio casu. Curua linea X A dicatur linea parabolica habens axem A B, si angulus X A B habeat pro-

proprietatem annotatam in quarto casu. Curua linea X A, vocetur linea hyperbolica habens axem A B, si angulus X A B habeat proprietatem annotatam in quinto casu. Integrum nobis non erat simili modo hic præscribere, vt linea X A vocetur recta, si angulus X A B habeat proprietatem annotatam in primo casu: vel vt linea curua X A, vocetur linea circularis habens diametrum A B, si angulus X A B habeat proprietatem annotatam in secundo casu, illud tamen licitum foret, si hactenus à nobis allata non esset definitio lineæ rectæ, aut lineæ circularis, vel diametri eius: nunc vero nobis ostendendum est, proprietatem in primo casu annotatam, conuenire omni & soli angulo X A B, qui iuxta definitiones prius adhibitas, dici potest rectilineus; & similiter proprietatem annotatam in secundo casu, conuenire omni & soli angulo X A B, qui iuxta definitiones prius adhibitas, dici potest angulus circularis habens axem A B; vtrumque ostendo initio capitis subsequentis; Simile aliquid ostendendum non est de angulo elliptico, parabolico, aut hyperbolico: etenim ex propositis hic definitionibus immediatè patet, omnem & solum angulum ellipticum habere proprietatem annotatam in tertio casu: atque omnem & solum angulum parabolicum, aut hyperbolicum, habere proprietatem in quarto vel quinto casu annotatam.

Plana sectio appelletur, superficies quæ communis est corpori secto, & plano secanti: ex pluribus planis sectionibus quæ dari possunt, aliquibus speciale nomen attribuo. Plana superficies vtrinque terminata lineis constituentibus angulum rectilineum, vocetur sectio triangularis Plana superficies vtrinq; terminata lineis circularem angulum constituentibus, vocetur sectio circularis, & axis eius appelletur recta linea quæ circularis anguli axis est. Plana superficies vtrinque terminata lineis constituentibus angulum ellipticum, dicatur sectio elliptica: & axis eius vocetur recta linea quæ anguli elliptici axis est. Plana superficies vtrinque terminata lineis constituentibus angulum parabolicum, dicatur sectio parabolica: axis eius vocetur recta linea quæ anguli parabolici axis est. Plana superficies vtrinque terminata lineis constituentibus angulum hyperbolicum, appelletur sectio hyperbolica: axis eius vocetur recta linea quę anguli hyperbolici axis est. Ex nominatis sectionibus duæ inter se similes dicantur, quando lineæ quibus vtrinque terminantur constituunt angulos inter se æquales. Quandonam duo anguli rectilinei inter se æquales sint, suo loco diximus in secunda parte huius ideę. Duo anguli, circulares, elliptici, parabolici, aut hyperbolici, dicantur æquales inter se: quando eorum finibus primis inter se æqualibus, respon-

respondent sinus secundi, vel radij æquales; idem verum esse de angulis rectilineis ostensum est in tertia parte huius ideæ. Ex nominatis quinque angulis linearibus duo dicentur similes inter se, si ex paulo ante expositis proprietatibus eamdem communem habeant; dissimiles erunt, si eamdem illam proprietatem non habeant communem; hinc inter se similes sunt omnes anguli rectilinei: item omnes anguli circulares: item omnes anguli elliptici; item omnes anguli parabolici: item omnes anguli hyperbolici. Dissimiles sunt rectilinei & mixtilinei; circulares & elliptici; circulares & parabolici &c. Duæ linee circulares, ellipticæ, parabolice aut hyperbolice dicuntur similes inter se, si cum suis axibus æquales angulos constituant. Non erit inutile hic reflectere omnibus angulis paulo ante nominatis commune esse, neque augeri neque imminui per productionem aut contractionem linearum à quibus anguli constituuntur; & consequenter earumdẽ istarum linearum productionem aut contractionem non impedire similitudinem inter duas sectiones conicas aut eiusmodi sectionum curuas lineas. Præterea lineas vtrinque terminantes duas sectiones conicas similes inter se, necessario quidem constituere angulos æquales, atque adeo similes inter se: sed tamen lineas vtrinque terminantes duas sectiones conicas, atque constituentes angulos inter se similes, non necessario constituere angulos æquales inter se, atque adeo sectiones illas necessario similes non esse, sed posse esse dissimiles inter se: Denique eamdem lineam diuersimode consideratam non necessario sibi ipsi similem esse. Exempli gratia supposito quod linea A F sit linea elliptica, atque eius
Fig. 47. axis sit, tam linea A B, quam linea F H, (quod fieri posse suo loco constabit) hoc inquam supposito, non necessario sequitur, linea A F est eadem cum linea F A, ergo linea A F est similis lineæ F A; quando enim dicitur linea A F est eadem cum linea F A, sensus est, in linea A F, nullam inueniri partem quæ non inueniatur in linea F A; quando vero dicitur lineam A F esse similem lineæ F A, sensus esse potest, eodem modo partes lineæ A F excurrere à puncto A versus F, quo excurrunt à puncto F, versus punctum A: etenim ab identitate vel diuersitate modi quo lineæ excurrunt ab aliquo puncto, dicuntur similes aut dissimiles inter se, vt satis constat ex allatis definitionibus: iam vero per se manifestum est, lineam eamdem diuerso modo, siue diuersa curuitate excurrere posse à puncto A versus punctum F, quam à puncto F versus punctum A: quandoquidem hæc identitas, aut diuersitas curuitatis, desumatur à proprietatibus superius enumeratis.

Integra ellipsis dicitur, plana superficies vndique terminata duabus

bus lineis ellipticis similibus, atque communem axem habentibus. Integra parabola dicitur, plana superficies vtrinque terminata duabus lineis parabolicis similibus, communem verticem & axem habentibus. Integra hyperbola, est plana superficies vtrinque terminata duabus lineis hyperbolicis communem verticem & axem habentibus. Duæ lineæ circulares, vel ellipticæ similes, habentes communem diametrũ aut axem concurrunt in diametri vel axeos extremitate, si producantur: oppositum accidit in duabus lineis parabolicis, aut hyperbolicis similibus communem verticem & axem habentibus; etenim hę lineæ productæ nunquam concurrunt, aut inter se, aut cum axe; hinc non minus integram dicimus parabolam aut hyperbolam, vtrinque terminatam lineis parabolicis aut hyperbolicis, quæ parum productæ sint, quam si longius fuerint productæ, quantumcunque enim productæ fuerint, semper vlterius, atque vlterius produci possunt: oppositum accidit in lineis circularibus, atque ellipticis.

Apud Apollonium, aut alios, qui scripserunt de conicis sectionibus, voces circulus, ellipsis, parabola, hyperbola, ita videntur adhiberi, vt subinde significent planas illas superficies integras, quæ iuxta nos constituunt integrum circulum, integram ellipsim, vel parabolam, aut hyperbolam; subinde vero significent prædictarum superficierum partes quæ à nobis appellantur sectiones circulares, ellipticæ parabolicæ aut hyperbolicæ; subinde etiam significent illas lineas quas nos dicimus circulares, ellipticas parabolicas aut hyperbolicas. Præterea Apollonius vocat ordinatim applicatas ad axem ellipseos, parabolæ, aut hyperbolæ, easdem illas lineas, quas nos hic appellauimus sinus primos anguli elliptici, parabolici aut hyperbolici; illæ vero lineæ quas nominauimus prædictorum angulorum sinus secundos, ab Apollonio dicuntur interceptæ, fortassis quia sunt partes axeos quę intercipiuntur inter verticem, & ordinatim applicatam ad axem. Punctum quod paulo superius vocauimus verticem anguli, elliptici, parabolici, aut hyperbolici, etiam cum Apollonio dicimus verticem, ellipsis, parabolæ, aut hyperbolæ. Similiter lineam quam vocauimus axem anguli elliptici, parabolici, vel hyperbolici: etiam cum Apollonio dicimus axem ellipseos, parabolæ, aut hyperbolæ; lineam quam circularis anguli axem vocauimus, circuli axem appellare non possumus: quia vsu receptum est, circuli axem appellare, lineam rectam per circuli centrum transeuntem, atque perpendicularem ad planum circuli. Linea A R habens proprietatem in quinto casu indicatam, ab Apollonio vocatur diameter transuersa hyperbolæ: hanc eam- *Fig. 49.*

 dem

dem lineam appellamus hyperbolici anguli X A B, vel hyperbolicæ sectionis X A B, vel hyperbolicæ lineæ X A, vel hyperbolæ, transuersam diametrum.

Reliquæ voces spectantes ad materiam de conicis sectionibus, atque à nobis adhibendæ, exponentur vbi occurret illarum necessitas aut vsus: de cono tamen & coni axe, atque triangulo per axem, aliqua addo in fine huius capitis.

Quidquid sit de propria significatione vocis, cylinder, à nobis cylinder circularis appellatur, corpus quod ductu primo, vel secundo, producitur ex circulo, vel sectione circulari; qui cylinder circularis dicitur rectus, si producatur ductu primo, vel dicitur obliquus, si producatur ductu secundo; atque per vocem cylinder simpliciter positam, solum cylindrum circularem intelligi volumus, quemadmodum supra diximus per vocem, angulus, intelligendum esse solum angulum rectilineum. Cylinder ellipticus dicitur, corpus quod ductu primo vel secundo producitur ex basi quæ sit ellipsis, vel sectio elliptica. Cylinder parabolicus dicitur, corpus quod ductu primo vel secundo producitur ex basi quæ sit parabola, vel sectio parabolica. Cylinder hyperbolicus appellatur, corpus quod ductu primo vel secundo producitur ex basi quæ sit hyperbola, vel sectio hyperbolica. Singuli illi cylindri recti erunt, si producantur ductu primo; si ductu secundo producantur erunt obliqui. Quando dicitur exempli gratia cuiuscunque figuræ cylinder, significantur distributiuè cylindri omnes hic propositi. Parallelogrammum cylindricum vocetur, cylindri cuiuscunque figuræ curua superficies, quæ terminatur quatuor lineis, quarum duæ quælibet inter se oppositæ sunt in planis parallelis inter se. Triangulum cylindricum appelletur, cylindri cuiuscunque figuræ curua superficies, terminata tribus lineis, quarum quælibet sint in aliquo eodem plano. Rectangulum cylindricum est parallelogrammum cylindricum cuius singula duo latera contigua sunt in planis simul constituentibus rectum angulum. Cylindricum triangulum rectangulum, est triangulum cylindricum cuius duo latera contigua sunt in planis simul constituentibus rectum angulum. Exempli gratia cuiuscunque figuræ cylindrum repræsentet O L, atque in eius curua superficie ducta sit linea A C; hoc posito, fieri potest vt linea A C sit in aliquo eodem plano, & etiam fieri potest vt linea A C non sit in aliquo eodem plano; linea A C erit in aliquo eodem plano, si planum aliquod transiens per duo puncta A & C, etiam transeat per singula alia puncta lineæ A C; verum si nullum planum transiens per duo puncta A & C, etiam transeat per singula puncta lineæ A C, tunc linea A

Fig. 58.

C non

C non erit in aliquo eodem plano: ex quo satis patet, quæ & quales sint lineæ quæ sunt in eodem plano, & quomodo differant à lineis quæ non sunt in eodem plano. Iam verò superficies terminata quatuor lineis A B, B C, C D, D A, erit parallelogrammum cylindricum, si habeat sequentes conditiones: primo, vt singulæ lineæ A B, B C, C D, D A, sint in curua superficie cylindri O L: secundo, vt singulæ illæ lineæ sint in aliquo eodem plano: tertio vt planum lineæ A B, sit parallelum plano lineæ D C, & etiam planum lineæ A D sit parallelum plano lineæ B C; si desit aliqua ex his conditionibus, superficies terminata quatuor lineis A B, B C, C D, D A, non erit parallelogrammum cylindricum. Similiter superficies terminata tribus lineis A C, C D, D A, erit triangulum cylindricum, si habeat sequentes conditiones: primo, vt singulæ lineæ A C, C D, D A, sint in superficie curua cylindri O L: secundo, vt singulæ istæ lineæ sint in aliquo eodem plano; si desit aliqua ex his conditionibus, superficies terminata tribus lineis A C, C D, D A, non erit triangulum cylindricum. Supposito quod superficies B D sit parallelogrammum, cylindricum, erit etiam rectangulum cylindricum, si plana linearum A B, & D C, sint perpendicularia, ad plana linearum A D & B C. Similiter supposito quod superficies A D C sit triangulum cylindricum, erit etiam cylindricum triangulum rectangulum, si planum lineæ A D sit perpendiculare plano lineæ D C, vel plano lineæ A C: vel certe planum lineæ D C, sit perpendiculare plano lineæ A C.

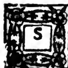
Conus appellatur, corpus quod ductu tertio producitur ex basi quæ sit circulus. Axis coni appellatur, recta linea à coni vertice ducta ad centrum baseos. Conus dicitur rectus, quando axis eius est perpendicularis ad basim coni. Conus dicitur obliquus, quando axis eius non est perpendicularis ad basim coni. Coni triangulum per axem, dicitur illud triangulum, quod pro basi habet diametrum baseos coni, & verticem cum ipso cono communem habet; hinc duo latera trianguli per axem etiam sunt duo opposita coni latera: & vicissim duo opposita coni latera, etiam sunt duo latera trianguli per axem.

* *
*

CAPVT II.

Prius oſtenditur ſolas illas figuras planas, quas coni ſectiones appellauimus, produci ex cono ſecto plana ſuperficie: eaſdemque planas ſuperficies ſiue conicas ſectiones, etiam produci poſſe ex alijs corporibus ſectis plana ſuperficie. Denique proponuntur nonnulla de parallelogrammis & triangulis cylindricis.

Fig. 52. 53. 54. 55.



It conus aliquis O L P, rectus vel obliquus; conus iſte ſecari poterit plano; Primo, vt vertex coni ſit in plana ſectione. Secundo, vt plana ſectio, infra coni verticem occurrat coni lateribus, & cum aliquo, verſus coni verticem, faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel oppoſito coni latere facit baſis coni. Tertio, vt plana ſectio, infra coni verticem occurrat coni lateribus, ſed cum nullo, verſus coni verticem, faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel oppoſito coni latere facit baſis coni. Quarto, vt plana ſectio infra verticem occurrat vni lateri ipſius coni, atque ad oppoſitum coni latus parallela ſit. Quinto, vt plana ſectio, infra verticem occurrat vni lateri ipſius coni, atque oppoſito coni lateri occurrat producto ſupra verticem. Rectè intellectis terminis, ſatis manifeſtum eſt non niſi quinque modis hic enumeratis, plano aliquo, ſecari poſſe conum O L P; etenim ex ipſis terminis patet, quod plana ſectio coni producta, neceſſario occurrat vtrique ex duobus oppoſitis lateribus ipſius coni, ſimiliter productis: vel certe vni ex his duobus coni lateribus occurrat, atque ad alterum parallela ſit. Iam verò, vel plana ſectio, in ipſo coni vertice occurrit vtrique lateri ipſius coni, vel vtrique lateri ipſius coni non occurrit in vertice coni; ſi plana ſectio in ipſo coni vertice occurrit duobus oppoſitis coni lateribus, habetur ſectio primo loco propoſita; ſi plana ſectio in ipſo coni vertice non occurrit duobus oppoſitis coni lateribus: vel plana ſectio infra coni verticem occurrit duobus oppoſitis coni lateribus, vt cum aliquo, verſus coni verticem, faciat angulum æqualem

lem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit basis coni: vel infra coni verticem non occurrit duobus oppositis coni lateribus, vt cum aliquo latere versus coni verticem faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit coni basis, si plana sectio, infra coni verticem occurrit duobus oppositis coni lateribus, vt cum aliquo versus coni verticem faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit basis ipsius coni, habetur sectio secundo loco proposita; si plana sectio, infra coni verticem non occurrit duobus oppositis coni lateribus, vt cum aliquo versus coni verticem faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit basis ipsius coni: vel infra coni verticem occurrit quidem duobus oppositis coni lateribus, sed cum nullo versus coni verticem facit angulum æqualem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit basis coni: vel infra verticem non occurrit duobus oppositis coni lateribus; si sectio plana infra verticem occurrat quidem duobus oppositis coni lateribus, sed cum nullo versus coni verticem faciat angulum æqualem angulo quem cum eodem vel opposito coni latere facit basis ipsius coni, habetur sectio tertio loco proposita; si verò sectio plana, infra verticem non occurrat duobus oppositis coni lateribus: vel vni ex oppositis coni lateribus infra verticem ita occurrit, vt ad alterum sit parallela: vel certe vni ex oppositis coni lateribus infra verticem ita occurret, vt producta etiam cum altero latere producto concurrat supra verticem; si plana sectio vni ex oppositis coni lateribus infra verticem ita occurrat, vt ad alterum sit parallela, habetur sectio quarto loco proposita; denique si plana sectio vni ex oppositis coni lateribus infra verticem ità occurrat, vt producta etiam cum altero latere producto concurrat supra verticem, habetur sectio quinto loco proposita; atque adeo constat, conum O L P, siue rectum, siue obliquum, secari non posse plano aliquo, nisi quinque modis hic enumeratis. Qualem superficiem, siue sectionem planam, exhibeat conus in singulis ex quinque diuersis casibus propositis, docent quinque theoremata, quæ priora duo hic subsequuntur: prius enim ostendendum est angulo rectilineo, atque circulari, conuenire proprietates, indicatas superiori capite: quod facio in primo & secundo theoremate.

Theorema I.

EX puncto A, rectæ lineæ A B, per idem planum excurrat linea A X, cuius duo quæuis puncta sint D & F: atque ex punctis D & F *Fig. 45.*

D & F, ductæ sint rectæ lineæ D C & F E, occurrentes rectæ A B in punctis C & E, vt anguli D C A, & F E A, sint inter se æquales.

Dico primo C D *ad* E F = A C *ad* A E, si angulus X A B est rectilineus.

Dico secundo angulum X B A esse rectilineum, si C D *ad* E F = A C *ad* A E.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim angulus D C A = angulo F E A, & insuper angulus D A C est communis: ergo, *per theor.5.partis 3. Ideæ*, triangulum D C A est simile triangulo F E A: ergo C D *ad* E F, = A C *ad* A E. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim angulus D C A = angulo F E A, & insuper C D *ad* E F = A C *ad* A E: ergo, *per theor.5. partis 3. Ideæ*, triangulum C A D est simile triangulo E A F: ergo angulus C A D = angulo E A F: ergo, *per theor.1. cap.1. partis 5. Ideæ*, puncta A, D, F, sunt in directum: adeoque F D A, hoc est X A, est recta linea: & angulus X A B est rectilineus. Quod erat secundum.

Theorema II.

EX puncto A, rectæ lineæ A B, per idem planum excurrat linea A X, & recta D C repræsentet quamlibet rectam lineam, quæ lineæ A X occurrat in D, lineæ vero A B occurrat in C, vt angulus D C A rectus sit.

Dico primo, D C 2 = A C *in* C B: si angulus X A B, est angulus circularis, habens axem A B.

Dico secundo, angulum X A B esse angulum circularem, habentem axem A B: si D C 2 = A C *in* C B.

Constructio pro prima parte. Ductæ sint rectæ lineæ B D & A D.

Demonstratur prima pars. Per hypothesim angulus X A B, est angulus circularis habens axem A B: ergo linea B D A, est dimidia circumferentia circuli habentis diametrum A B: ergo *per theor. 6. partis 3. Ideæ*, angulus B D A rectus est: ergo *per theor.10. partis 3. Ideæ*, A C *ad* C D = C D *ad* C B: ergo *per theor. 1. cap.1. partis 5. Ideæ*, D C 2 = A C *in* C B. Quod erat primum.

Constructio pro secunda parte. Diametro A B, descriptus sit arcus circuli, secans lineam C D, productam si opus fuerit, in puncto H.

Demonstratur secunda pars. Per primam partem H C 2 = A C *in* C B: *sed, per hypothesim*, etiam D C 2 = A C *in* C B: ergo H C 2 = D C 2:

= D C 2 : ergo H C = D C : ergo puncta D & H non sunt diuersa: sed per constructionem punctum H, est in arcu diametro A B descripto : ergo etiam punctū D, est in arcu diametro A B descripto : sed per hypothesim punctum D, est quodlibet punctum lineæ X A : ergo quodlibet punctum lineæ X A est in arcu diametro A B descripto : ergo angulus D A B, hoc est angulus X A B, est angulus circularis habens diametrum A B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc supposito quod angulus X A B sit circularis angulus, habens axem A B: etiam manifestum est, D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B : atque insuper D C 2 = A C *in* C B. Etenim ex proposito theoremate constat, D C 2 = A C *in* C B; & insuper F E 2 = A E *in* E B : ergo D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B : & insuper D C 2 = A C *in* C B. *Fig. 46. & 47.*

Ex proposito corollario manifestum est, quod omni circulari angulo X A B conueniens proprietas sit, D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* AE *in* E B : & etiam D C 2 = A C *in* C B; præterea ex ipsa anguli elliptici definitione nostra constat, quod omni elliptico angulo X A B conueniens proprietas sit, D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B : sed tamen D C 2 non = A C *in* C B.

Hæ duæ proprietates quarum prima conuenit omni & soli angulo circulari, atque secunda conuenit omni & soli angulo elliptico, inter se conueniunt quo ad primam partem, singulis enim commune est, D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B : differunt tamen quo ad secundam partem, nam in circulari angulo D C 2 = A C *in* C B : verum in elliptico angulo D C 2 non = A C *in* C B. Hanc circularis atque elliptici anguli conuenientiam, atque discrepantiam breuiter indicatam, existimaui notatu dignam.

Theorema III.

CVіusuis coni O L P, plana sectio sit X H G, triangulum per axem coni, perpendiculare ad coni planam sectionem, sit O L P, eius lateribus L O & L P, infra coni verticem occurrat plana sectio in punctis H & G, atque ex duobus angulis G H L & H G L, vnus sit æqualis angulo O P L; denique planæ sectionis X H G, linea X H, sit in coni superficie. *Fig. 50.*

Dico

Dico angulum X H G, esse angulum circularem: adeoque lineam XA esse lineam circularem, habentem diametrum HG: planamque ſectionem X H G, esse sectionem circularem.

Theorema duplicem admittit casum; primus casus fit quando angulus G H L = angulo O P L, adeoque anguli æquales adiacent eidem lateri coni. Secundus casus fit, quando angulus H G L = O P L, adeoque anguli æquales non adiacent eidem coni lateri.

Demonstratur primus casus. Per hypothesim angulus G H L = angulo O P L: ergo, *per theor. 4. partis tertiæ ideæ*, lineæ O P & G H sunt parallelæ: sed ex hypothesi etiam planum O L P est perpendiculare ad vtrumque planum X H G & Z P O: ergo, angulus planus X H L = angulo plano Z P L: ergo eiusdem coni planæ sectiones X H G & Z P O sunt parallelæ. quandoquidem igitur ex hypothesi constet sectionem Z P O esse sectionem circularem cuius diameter sit O P, ex conceptu ductus tertij quo conus producitur, etiam patet sectionem X H G esse sectionem circularem cuius diameter sit GH: ergo angulus X H G, est angulus circularis: adeoque linea X A est linea circularis habens diametrum H G: & sectio X H G, est sectio circularis vt asseritur in primo casu.

Constructio pro secundo casu. Posita sit quævis plana sectio D A B, perpendicularis ad planum O L P, & habens rectam lineam

Fig. 51. A B communem cum triangulo P L O, atque parallelam rectæ P O: planis verò sectionibus X H G & DAB communis sit recta D C.

Demonstratur secunda pars. Per constructionem lineæ A B & P O sunt parallelæ: ergo angulus B A L = angulo O P L: sed per hypothesim angulus O P L = angulo H G L: ergo angulus B A L = angulo H G L: sed, *per theor. 3. partis 3. ideæ*, etiam angulus A C H = angulo B C G: ergo, *per theor. 5. partis 3. ideæ* triangulum A C H est simile triangulo G C B: ergo H C *ad* C B = A C *ad* C G: ergo, *per theor. 1. cap. 1. partis 5. ideæ*, H C *in* C G = A C *in* C B: sed quoniam ex hypothesi & constructione patet D C esse perpendicularem *ad* A B & insuper ex prima parte constet angulum D A B esse angulum circularem, per theorema 2. etiam D C 2 = A C *in* C B: ergo D C 2 = H C *in* C G ergo, per theorema 2: angulus X H G est angulus circularis: adeoque linea X H est linea circularis habens diametrum H G: & plana sectio X H G, est sectio circularis: Quod in secundo casu erat demonstrandum.

Nota. Supposito quod planum aliquod F H G, sit perpendiculare ad planum G H L, necessario consequuntur duæ veritates: quarum prima est, quamuis rectam D C, positam in plano F H G, esse perpendicularem, ad quamuis rectam C B positam in plano G H L,

si rectè

si rectæ D C & C B sint diuersæ à communi recta H G, atque concurrant in C. secunda est, angulum quem facit communis recta GH cum recta H L, esse æqualem angulo quem facit planum F H G cum eadem recta H L. vtraque veritas immediatè patet ex ijs quæ de angulis dicta sunt in secunda parte ideæ; & etiam vtraque veritas, non tantum vsui est in theoremate hic proposito, verum etiam frequenter seruit in ijs quæ subsequuntur.

Theorema IV.

Cuiusuis coni O A P, plana sectio sit X A B, triangulum per axem coni perpendiculare ad planam coni sectionem sit O A P, eius lateribus A O, & A P, in ipso vertice L, occurrat plana sectio, atque etiam rectæ O P occurrat in B; denique planæ sectionis X A B, linea X A, sit in coni superficie. *Fig. 52.*

Dico angulum X A B esse rectilineum: adeoque lineam X A esse rectam: atque sectionem planam X A B esse, sectionem triangularem.

Constructio duæ coni sectiones planæ, & basi parallelæ, sint DHG & F *K* I: harum sectionum, & plani O A P, communes rectæ lineæ sint G H & I K: earumdem sectionum, & sectionis X A B communes rectæ lineæ sint D C & F E.

Demonstratio. Per theor. 3. anguli D H G & F *K* I singuli sunt anguli circulares, quorum axes sunt H G & *K* I, atque ad hos axes perpendiculares sunt rectæ D C & F E, vt patet ex hypothesi & constructione: ergo per theor. 2. constat D C 2 = H C *in* C G: item F E 2 = *K* E *in* E I: ergo D C 2 *ad* F E 2 = H C *in* C G *ad* K E *in* E I iam vero, quoniam per primum theorema H C *ad* K E = A C *ad* A E ⏄ C G *ad* E I, & per theor. 1. cap. 1. partis 5. ideæ, H C *in* C G *ad* *K* E *in* E I = H C *ad* *K* E *in* C G *ad* E I: patet etiam H C *in* CG *ad* *K* E *in* E I = A C *ad* A E *in* A C *ad* A E ⏄ A C 2 *ad* A E 2: ergo etiam D C 2 *ad* F E 2 = A C 2 *ad* A E 2: ergo D C *ad* F E = A C *ad* AE: ergo, per theor. 1. angulus X A B est rectilineus: adeoque linea X A est recta, & sectio plana X A B, est triangularis. Quod erat demonstrandum.

Theorema V.

Cuiusuis coni O L P, plana sectio sit X A B, triangulum per axem coni perpendiculare ad coni planam sectionem sit OLP, eius lateribus L O & L P infra coni verticem occurrat plana sectio in punctis A & G, atque ex duobus angulis B A L, A B L nullus æqualis sit angulo O P L: denique planæ sectionis X A B, linea X A, sit in coni superficie.

Fig. 53.

Dico angulum X A B, esse angulum ellipticum: atque adeo lineam X A esse lineam ellipticam habentem axem A B: & planam sectionem X A B esse sectionem ellipticam.

Constructio. Coni O L P duæ sectiones planæ, & basi parallelæ sint D H G & F K I: his sectionibus & plano O L P communes sint lineæ G H & I K, iisdem sectionibus & sectioni X A B communes sint lineę D C & F E.

Demonstratio. Per theor. 1. patet A C *ad* A E = H C *ad* K E, & insuper C B *ad* E B = C G *ad* E I: ergo, *per theor.* 1. *cap.* 1. *partis* 5. *ideæ*, A C *in* C B *ad* A E *in* E B = H C *in* C G *ad* K E *in* E I: atqui ex tertio & secundo theoremate constat D C 2 = H C *in* C G, & insuper F E 2 = K E *in* E I: ergo D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* CB *ad* AE *in* E B. Præterea ex constructione patet angulum C H L = angulo O P L, & tamen per hypothesim angulus C B L non = angulo OPL: ergo triangulum A C H non est simile triangulo G C B, & tamen per theor. 3. partis 3. ideæ angulus A C H = angulo G C H: ergo, *per theorema* 5. *partis* 3. *ideæ*, A C *ad* C G non = H C *ad* C B: ergo, *per axioma* 3. *partis* 4. *ideæ*, A C *in* C B non = H C *in* C G: sed vt prius ostensum est D C 2 = H C *in* C G: ergo D C 2 non = A C *in* C B. Quandoquidem igitur constet D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B, & tamen D C 2 non = A C *in* CB: per definitionem patet angulum X A B esse ellipticum: adeoque lineam X A esse lineam ellipticam cuius axis sit A B: & sectionem planam X A B, esse sectionem ellipticam. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Cuiusuis coni O L P, plana sectio sit X A B, triangulum per axem coni perpendiculare ad coni planam sectionem, sit OLP, vni eius lateri L P, infra coni verticem occurrat plana sectio in pun-

cto

cto A; atque alterum latus L O sit parallelum ad planam sectionem; denique linea X A sit in coni superficie.

Dico angulum X A B esse angulum parabolicum; atque adeo lineam X A esse lineam parabolicam habentem axem A B; & sectionem X A B esse sectionem parabolicam. *Fig. 54.*

Constructio vt in 5. theoremate.

Demonstratio. Ex hypothesi & constructione satis patet figuram I E C G, esse parallelogrammum: adeoque C G = E I; ergo, *per theor. 1. cap. 1. partis 5. ideæ*, H C *in* C G *ad* K E *in* E I = H C *ad* K E: sed, *per theor.* 1. etiam A C *ad* A E = H C *ad* K E: ergo H C *in* C G *ad* K E *in* E I = A C *ad* AE: atqui ex tertio & secundo theoremate, constat D C 2 = H C *in* C G, item F E 2 = K E *in* E I; ergo D C 2 *ad* F E 2 = A C *ad* A E: ergo per definitionem angulus X A B est angulus parabolicus; adeoque linea X A est linea parabolica habens axem A B; & plana sectio X A B est sectio parabolica. Quod erat demonstrandum.

Theorema VII.

Cuiusuis coni O L P, plana sectio sit X A B, triangulum per axem coni, perpendiculare, ad coni planam sectionem, sit O L P, eius lateri L P, occurrat plana sectio in puncto A, atque eadem plana sectio producta occurrat in puncto R, lateri O L, similiter producto supra coni verticem, præterea rectæ O P occurrat in puncto B; denique planæ sectionis X A B, linea X A sit in coni superficie. *Fig. 55.*

Dico angulum X A B esse hyperbolicum: adeoque lineam X A esse lineam hyperbolicam habentem axem A B: & planam sectionem X A B esse sectionem hyperbolicam cuius transuersa diameter sit A R.

Constructio vt in theoremate 5.

Demonstratio. Per primum theorema patet R C *ad* R E = C G *ad* E I, & insuper A C *ad* A E = H C *ad* K E: ergo, *per theor. 1. cap. 1. partis 5. ideæ*, R C *in* A C *ad* R E *in* A E = H C *in* C G *ad* K E *in* E I: sed ex tertio & secundo theoremate patet D C 2 = H C *in* EG, item F E 2 = K E *in* E I: ergo D C 2 *ad* F E 2 = R C *in* A C *ad* R E *in* A C: ergo per definitionem angulus X A B, est angulus hyperbolicus: atque adeo linea X A est linea hyperbolica habens axem A B: & plana sectio X A B est sectio hyperbolica; denique huius sectionis diametrum transuersam esse A R, constat ex definitione li-

neæ quæ dicitur tranſuerſa diameter hyperbolæ. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

THeoremata hactenus propoſita, docent, non niſi aliquam ex ſupra memoratis quinque conicis ſectionibus, exhiberi poſſe à cono ſecto plana ſuperficie, ſiue conus qui ſecatur rectus ſit, ſiue obliquus; atque hoc erat quod in præſenti capite primo loco probandum ſuſcepimus. Alterum erat, eaſdem illas planas ſuperficies, quæ à nobis conicæ ſectiones appellantur, etiam exhiberi poſſe ab alijs corporibus à cono diuerſis, quando ſecantur plana ſuperficie; hoc docent ſubſequentia aliqua theoremata, in quibus conſidero aliqua ex ijs corporibus quæ ſuperiori capite cylindrica appellauimus, & oſtendo, quomodo plano ſecta, exhibeant conicas illas ſectiones, quæ exhibentur à cono ſecto plana ſuperficie.

Theorema VIII.

QVamlibet planam ſectionem conicam repræſentet ſuperficies Z P O, quæ ſit baſis priſmatis aut cylindri O L, atque parallelogrammum O M L P ſit perpendiculare ad baſim Z P O; præterea corporis O L quæuis plana ſectio D H G, ſit perpendicularis ad planum M P, atque cum illo plano habeat communem lineam HG: & angulus G H L ſit æqualis angulo O P L.

Fig. 56. vel 57.

Dico angulum Z P O æquari angulo D H G, atque adeo ſectionem D H G eſſe ſimilem ſectioni D H G.

Demonſtratio. Per hypotheſim plana ſectio D H G eſt perpendicularis ad planum MP, atque cũ illo cõmunem habet lineam GH: ergo angulus G H L = plano angulo D H L; ſimiliter patet angulum O P L = plano angulo Z P L: ſed per hypotheſim angulus G H L = angulo O P L; ergo planus angulus D H L = plano angulo ZPL: ergo plana D H & Z P, hoc eſt plana D H G & Z P O, ſunt inter ſe parallela: ergo conceptu ductus primæ claſſis, quo ex baſi Z P O producitur corpus O L, patet angulum Z P O = angulo D H G, qualiſcunque ſit angulus Z P O, atque adeò ſectionem Z P O eſſe ſimilem ſectioni D H G. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema IX.

Circularem sectionem conicam habentem axem P O, repræsentet superficies Z P O, quæ sit basis circularis cylindri recti vel obliqui O L: atque parallelogrammum O P L M sit perpendiculare ad basim Z P O; præterea cylindri O L quævis plana sectio X A B sit perpendicularis ad planum M P, atque cum illo plano habeat communem lineam A B, & angulus O P L non sit æqualis angulo B A L, neque angulo A B M. *Fig. 56. vel 57.*

Dico angulum X A B, esse angulum ellipticum habentem axem A B & planam sectionem X A B esse sectionem ellipticam.

Constructio. Duæ sectiones planæ D H G & F K I, singulæ sint perpendiculares ad planam M P, & cum illo communes habeant lineas H G & K I, atque cum sectione X A B habeant communes rectas D C & F E, denique anguli O P L, I K L & G H L sint inter se æquales.

Demonstratio. Per hypothesim lineæ O M & P L sunt parallelæ: ergo, *per theor. 11. partis 3. ideæ*, A C *ad* C B = H C *ad* C G, & insuper A E *ad* E B = K E *ad* E I: ergo, *per theor. 1. cap. 1. partis 5. ideæ*, A C *in* C B *ad* A E *in* E B = H C *in* CB *ad* KE *in* E I: sed quoniam per hypothesim angulus Z P O est circularis, atque adeo singuli anguli D H G & F K I circulares sint, per theor. 2. patet D C 2 = H C *in* C G & insuper F E 2 = K E *in* E I: ergo A C *in* C B *ad* A E *in* E B = D C 2 *ad* F E 2. præterea quoniam per hypothesim angulus O P L non = angulo A B M, & tamen per constructionem angulus O P L = angulo G H L: patet angulum A B M non = angulo C H L, adeoque angulum C B G non = angulo C H A: & tamen angulus A C H = angulo B C G: ego *per theor. 5. partis 3. ideæ*, A C *ad* C G non = H C *ad* C B: ergo A C *in* C B non = H C *in* C G: sed prius ostensum est H C *in* C G = D C 2: ergo A C *in* C B non = D C 2. Quandoquidem igitur D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* C B *ad* A E *in* E B, & tamen D C 2 non = AC *in* C B: per definitionem patet angulum X A B, esse angulum ellipticum, habentem axem A B, & planam sectionem X A B esse sectionem ellipticam. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema X.

Ellipticam sectionem habentem axem P O, repræsentet plana superficies Z P O, quæ sit basis elliptici cylindri recti vel obliqui O L, atque parallelogrammum O P L M sit perpendiculare ad basim Z P O: præterea cylindri O L quæuis plana sectio X A B sit
Fig. 57. perpendicularis ad planum M P, atque cum illo habeat communem lineam A B: deinde angulus O P L non sit æqualis angulo B A L: denique ex quouis puncto Q, lineæ Z P, ducta sit recta Q N perpendicularis ad rectam O P, & recta N C parallela rectæ P L, occurrat A B in puncto C.

Dico primo angulũ XAB esse angulũ circularem, habentem axem A B; adeoque sectionem X A B esse circularem, si A C *ad* Q N = Q N *ad* C B.

Dico secundo Angulum X A B esse angulum ellipticum habentem axem A B; adeoque sectionem X A B esse ellipticam, si AC *ad* Q N non = Q N *ad* C B.

Constructio vt in theoremate 9.

Demonstratur prima pars. Per theor. 8. angulus Z P O est æqualis angulo D H G, & habent axes P O & H G inter se æquales; sed etiam ex hypothesi & constructione manifestum illorum æqualium angulorum secundos sinus P N & H C inter se æquales esse: ergo eorumdem angulorum sinus primus Q N = sinui primo D C: atqui per hypothesim A C *ad* Q N = Q N *ad* C B; ergo A C *ad* DC = DC *ad* C B: ergo, *per axioma 3. cap. 2. partis 4. ideę*, D C 2 = A C *in* C B: ergo, *per theor.* 2. angulus D A B, hoc est X A B, est angulus circularis habens axem A B: adeoque sectio X A B, est sectio circularis. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per theor. 8. anguli Z P O, D H G, D *K* I sunt similes inter se, & habent axes PO, H G, K I inter se æquales: sed per hypothesim angulus Z P O est angulus ellipticus habens axem P O: ergo singuli anguli D H G & F K I sunt anguli elliptici similes habentes axes H G & *K* I inter se æquales: ergo H C *in* C G *ad* *K* E *in* EI = DC 2 *ad* FE 2: atqui discursu adhibito initio demonstrationis theorematis 9. etiam patet A C *in* CB *ad* AE *in* EB = H C *in* C G *ad* K E *in* E I: ergo A C *in* C B *ad* A E *in* E B = D C 2 *ad* F E 2. Præterea quia ex hypothesi & constructione satis constat D C = Q N, & per hypothesim A C *ad* Q N non = Q N *ad* CB: etiam patet A C *ad* D C non = DC *ad* C B ergo, *per axiom. 3. cap. 2.*
partis

partis 4. idea, *D* C 2 non = A C *in* C B; quandoquidem igitur D C 2 *ad* F E 2 = A C *in* CB *ad* A E *in* E B, & tamen D C 2 non = A C *in* C B: per definitionem angulus F A B, hoc est angulus X A B, est angulus ellipticus: adeoque sectio X A B est sectio elliptica. Quod in secunda parte asserebatur.

Theorema XI.

PArabolicam sectionem habentem axem P O, repræsentet plana superficies Z P O, quæ sit basis parabolici cylindri recti vel obliqui O L: atque parallelogrammum O P L M sit perpendiculare ad basim Z P Φ; præterea cylindri O L, quæuis plana sectio X A B, sit perpendicularis ad planum M P, atque cum illo habeat communem lineam A B: sed tamen angulus O P L non æquetur angulo B A L. *Fig. 56. vel 57.*

Dico angulum X A B, esse angulum parabolicum cuius axis sit A B: adeoque sectionem X A B esse sectionem parabolicam. Constructio vt in theoremate 9.

Demonstratio. Per theorema 8. singuli anguli D H G & F K I sunt æquales angulo Z P O: sed per hypothesim angulus Z P O est angulus parabolicus: ergo singuli anguli D H G & F *K* I sunt anguli parabolici inter se æquales: ergo D C 2 *ad* F B 2 = H C *ad* *K* E: sed H C *ad* *K* E = A C *ad* A E, quia triangula A C H & A E K sunt inter se similia: ergo D C 2 *ad* F E 2 = A C *ad* A E: ergo per definitionem angulus F A B, hoc est angulus X A B, est angulus parabolicus: adeoque sectio X A B est sectio parabolica. Quod erat demonstrandum.

Theorema XII.

HYperbolicam sectionem habentem axem P O repræsentet plana superficies Z P O, quæ sit basis hyperbolici cylindri recti vel obliqui O L: atque parallelogrammum O P L M sit perpendiculare ad basim Z P O; præterea cylindri O L, quæuis plana sectio X A B, sit perpendicularis ad planum M P, atque cum illo habeat communem lineam A B, sed angulus O P L non æquetur angulo B A L; denique recta O P producta sit vsque in Q, vt P Q sit transuersa diameter hyperbolicæ sectionis Z P O, atque recta Q R parallela rectæ P L occurrat rectæ B A productæ in R. *Fig. 56.*

Dico

Dico angulum X A B esse angulum hyperbolicum habentem transuersam diametrum A R: adeoque sectionem X A B esse sectionem hyperbolicam.

Constructio. Posita constructione theorematis 9. rectæ G H & I K productæ occurrant in N & S rectæ Q R.

Demonstratio. Per theor. 8. singuli anguli D H G & F K I sunt æquales angulo Z P O: sed per hypothesim angulus Z P O est angulus hyperbolicus, habens transuersam diametrum P Q: ergo anguli D H G & F K I sunt anguli hyperbolici inter se æquales, atque habentes diametrum transuersam æqualem rectæ P Q: sed ex hypothesi & constructione patet rectas H N & K S inter se, & rectæ P Q æquales esse: ergo anguli D H G & F K I sunt anguli hyperbolici æquales, eorumque transuersæ diametri sunt H N & K S: ergo D C 2 *ad* F E 2 = N C *in* C H *ad* S E *in* EK: sed quoniam triangula RCN, R E S, A C H, A E K sunt similia, adeoque latera æqualibus angulis opposita habent proportionalia, *per theor.1.cap.1.partis 5.ideæ,* patet N C *in* C H *ad* S E *in* E K = R C *in* C A *ad* R E *in* E A: ergo D C 2 *ad* F E 2 = R C *in* C A *ad* R E *in* E A: ergo per definitiones, angulus F A B, hoc est angulus X A B, est angulus hyperbolicus habens transuersam diametrum A R: adeoque sectio X A B est sectio hyperbolica. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Planas illas superficies, quas sectiones conicas appellauimus, non tantum exhiberi à cono secto plana superficie, satis constat ex theoremate 8. in quo tantum consideratur sectio parallela basi corporis secti, atque ostenditur, quomodo hoc casu corpus diuersum à cono, exhibeat sectionem similem basi, qualemcumque sectionem conicam pro basi habeat. Nolui hoc theorema proponere sub maiori amplitudine, quam admittit, quia hoc loco non agimus de planis superficiebus diuersis ab enumeratis quinque sectionibus conicis. Theoremata quæ octauum subsequuntur, considerant diuersæ figuræ cylindros sectos plana superficie non parallela cylindrorum basi; atque exhibentes conicas sectiones, quæ tamen cylindrorum basibus similes non sunt. Ex his superabunde constat, non solos conos sectos plana superficie, exhibere conicas sectiones: quare ex theorematibus hactenus propositis, constat nullas quidem superficies, nisi quinque superius memoratas conicas sectiones, exhiberi posse à conicis corporibus sectis plana superficie: sed tamen easdem

easdem illas conicas sectiones, exhiberi posse à corporibus, quæ conica non sunt, quando secantur plana superficie.

Exponuntur aliqui termini, quibus vtimur, in considerationibus parallelogrammorum, & triangulorum cylindricorum.

APud Geometras vsu receptum videtur, per voces parallelogrammum, vel triangulum, simpliciter positas: significare solas figuras planas, vndique rectis lineis terminatas. Hic vsus non impedit, quo minus triangula sphærica appellent aliquas superficies curuas, atque curuis lineis terminatas; quantum enim est ex vi significationis quam habent prædictæ voces, parallelogrammum dici potest, quælibet superficies quatuor lineis terminata, quarum binæ quæuis inter se oppositæ, sunt inter se parallelæ. Similiter triangulum dici potest, quælibet superficies tribus lineis terminata. Ne recedam ab vsu paulo ante indicato, & tamen in maiori significationis amplitudine adhibere possim voces parallelogrammum & triangulum: per parallelogrammum vniuersaliter sumptum, intelligo superficiem quatuor lineis terminatam, quarum quæuis binæ inter se oppositæ, sunt paralellæ inter se. Per triangulum vniuersaliter sumptum, intelligo superficiem tribus lineis terminatam. Parallelogrammum atque triangulum vniuersaliter sumptum, indifferens est, vt sit planum, vel curuum: rectis vel curuis lineis terminatum: adeoque restringi potest ad tot diuersas species parallelogrammorum atque triangulorum, quot inter se specie diuersæ extensiones inueniuntur, quæ conuenire possunt, aut superficiebus, aut terminis superficierum; quibus conuenit definitio vniuersaliter sumpti parallelogrammi aut trianguli. Inter has diuersas species vniuersaliter sumptorum parallelogrammorum aut triangulorum, inueniuntur parallelogramma & triangula, quæ appellamus cylindrica: & licet curua superficies cylindrica, cui conuenit definitio parallelogrammi, aut trianguli vniuersaliter sumpti, dici posset parallelogramũ, aut triangulum cylindricum: tamen adhibemus cylindrici parallelogrammi & trianguli definitiones propositas in fine c. 1. huius sextæ partis Ideæ. Parallelogramma atq; triangula cylindrica à nobis diuiduntur in illa, quæ terminantur solis lineis breuissimis, & in illa quæ terminantur lineis, quæ singulæ breuissimæ non sunt, qua-

re aduertendum est, quas ex lineis per cylindricam superficiem ducibilibus appellemus breuissimas. In hac parallelogrammorum & triangulorum consideratione, ex lineis ductis per curuam cylindri superficiem, solas illas consideramus, quæ per eamdem cylindri partem excurrunt: non verò illas quæ ductæ sunt per cylindri superficies inter se oppositas: quare inter omnes lineas per cylindri perficiem ductas, atque eosdem terminos habentes, absolutè breuissimam dicimus illam lineam, quæ breuissima est inter omnes ducibiles per cylindri superficies inter se non oppositas: licet duci possit breuior linea, quæ per oppositam cylindri superficiem excur-
Fig. 59. rendo eosdem terminos connectat. Exempli gratia linea A E C ducta est per curuam cylindri superficiem N H L P I Z; quare inter omnes lineas per cylindri superficiem ducibiles, atque habentes terminos A & C, linea A E C erit breuissima, eo ipso quod per eamdem cylindri superficiem N H L P I Z, à puncto A ad punctum C, duci non possit altera linea, quæ breuior sit: licet per oppositam cylindri superficiem, à puncto A ad punctum C duci possit linea, quæ breuior sit quam A E C. Hoc sensu intelligendo lineas breuissimas ductas per cylindri superficiem, in theoremate 14. affertur proprietas conueniens omnibus, & solis lineis curuis atque breuissimis, ductis in curua superficie cylindri cuiuscunque figuræ; similis proprietas non requiritur pro rectis lineis, siquidem satis constet, quamlibet rectam lineam, non tantum in sensu iam exposito, sed absolute breuissimam esse omnium linearum eosdem terminos habentium. Ex diuersis lineis ductis per curuam cylindri superficiem, quænam rectæ aut curuæ sint, determinatur in theoremate 11, in quo statuitur, singulas lineas per curuam cylindri superficiem ductas atque alicui cylindri lateri parallelas, rectas esse: reliquas omnes esse curuas. Linea aliqua breuissima per cylindri superficiem ducta, breuissimè producta dicitur, quando ità producta est, vt in sensu iam exposito, inter suos terminos semper maneat breuissima. Parallelogrammi plani breuissimis lineis terminati, altitudo, siue mensura altitudinis, dicitur linea breuissima per planam superficiem ducta, atque connectens oppositum parallelogrammi latus cum eius basi breuissimè producta. Similiter cylindrici parallelogrammi breuissimis lineis terminati altitudo, siue mensura altitudinis, appellatur linea breuissima per cylindricam illam superficiem ducta, atque connectens oppositum parallelogrammi latus, cum eius basi breuissimè producta. Trianguli plani breuissimis lineis terminati altitudo, siue mensura altitudinis, vocatur linea breuissima per planam superficiem ducta, atque connectens verticem trianguli cum
eius

eius basi breuissimè producta. Pari modo cylindrici trianguli breuissimis lineis terminati altitudo, siue mensura altitudinis, dicitur linea breuissima per cylindri superficiem ducta, atque connectens verticem trianguli cum eius basi breuissimè producta.

Theorema XIII.

CORpus O L repræsentet cuiuscunque figuræ cylindrum, in cuius curua superficie ductæ sint duæ lineæ A N & A C: quarum vna A N, sit parallela ipsius cylindri lateri P L: altera A C, non sit parallela lateri P L. *Fig. 59.*

Dico primo, lineam A N rectam esse.

Dico secundo, lineam A C rectam non esse.

Demonstratur prima pars. Ex conceptu ductus Geometrici, quo ex basi Z P O producitur cylinder O L, satis patet, à puncto A produci aliquam cylindricæ superficiei lineam rectam lateri P L parallelam: sed etiam manifestum est, in cylindrica superficie per idem punctum A duci non posse nisi vnicam lineam lateri P L parallelam: igitur linea A N, lateri P L parallela, atque per cylindri superficiem ducta, recta est. Quod in prima parte asserebatur:

Constructio pro secunda parte. In curua cylindri superficie, ducta sit linea I H parallela lateri P L: atque I H occurrat A C in puncto K. Denique in plano A N C ducta sit recta A C.

Demonstratur secunda pars. Quoniam per constructionem linea I H est parellela lateri P L: per primam partem, linea I H recta est: sed etiam patet lineam I H esse parallelam plano A N C, adeòque totam esse extra planum A N C: ergo punctum K est extra planum A N C: sed recta A C est in plano A N C: ergo punctum K est extra rectam A C: ergo linea transiens per puncta A, K, C, recta non est: sed linea A C per curuam cylindri superficiem excurrens, est linea transiens per puncta A, K, C: ergo linea A C per curuam cylindri superficiem excurrens, recta non est. Quod in secunda parte asserebatur.

Theorema XIV.

CORpus O L repræsentet cuiuscunque figuræ cylindrum, cuius duo latera sint P L & Z N. Curuæ cylindri superficiei, & plano E C A, communis sit linea A E C. *Fig. 59.*

Dico primo, lineam A E C, esse breuissimam, quæ à puncto A, ad punctum C, duci potest per curuam cylindri superficiem: si planum E C A, est perpendiculare ad planum Z P L N.

Dico secundo, planum E C A, esse perpendiculare ad planum Z P L N: si linea A E C est breuissima quæ à puncto A ad punctum C duci potest per curuam cylindri superficiem.

Constructio. Cylindri latus transiens per punctum E, sit I H, & planum I H G F sit perpendiculare ad planum Z P L N. Præterea planum quodlibet *K* C A, diuersum à plano E C A, habeat lineam A K C communem cum curua cylindri superficie: atque lineæ I H occurrat in puncto K. Denique planorum E C A, & K C A, communes intersectiones cum plano I H G F, sint E R & *K* R.

Demonstratur prima pars. Ex hypothesi & constructione satis patet, triangulum E *K* R esse rectilineum, atque eius angulum K E R, rectum esse: ergo per theor. 4. cap. 3. partis 5. Ideæ E K 2 † R E 2 = R K 2: ergo recta R K est maior recta R E: ergo punctum *K* magis distat à recta A R C, quam punctum E distet ab eadem recta A R C: cum igitur puncta E & K, sint qualibet puncta linearum A E C & A K C, inter se diuersa, atque in eodem cylindri latere posita: manifestum est, ex punctis inter se diuersis, atque in eodem cylindri latere positis, qualibet puncta lineæ A K C, magis distare à recta A C quam ab eadem recta A C distent puncta lineæ A E C: ergo linea A E C, est breuior linea A K C: sed linea A K C, est qualibet linea, quæ à puncto A ad punctum C duci potest per curuam cylindri superficiem, atque non constituta in plano perpendiculari ad planum Z P L N: ergo linea A E C, est breuior, qualibet alia linea A K C, quæ à puncto A ad punctum C duci potest per curuam cylindri superficiem, atque adeo linea A E C est breuissima. Quod asserebatur in prima parte.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim linea A E C est breuissima, quæ à puncto A ad punctum C duci potest per curuam cylindri superficiem: ergo linea R E est breuissima linearum connectentium lineas I H & F G inter se parallelas, vt patet ex hypothesi & constructione: ergo linea R E est perpendicularis ad lineam F G: ergo angulus rectilineus E R G rectus est: ergo linea E R, est perpendicularis ad planum Z P L N: sed per hypothesim linea E R est in plano E C A: ergo etiam planum E C A est perpendiculare ad planum Z P L N. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XV.

CORpus O L, repræſentet cuiuſcunque figuræ cylindrum, atque in eius curua ſuperficie deſcriptum ſit triangulum cylindricum A B C. Præte ea triangulum cylindricum A B C præciſè explanatum repræſentet figura plana K L M. Fig. 58.

Dico primo, figuram planam K L M, eſſe triangulum rectilineum: ſi ſingulæ lineæ terminantes triangulum cylindricum A B C ſint breuiſſimæ.

Dico ſecundo, figuram planam K L M, non eſſe triangulum rectilineum: ſi ſingulæ lineæ terminantes triangulum cylindricum A B C, non ſint breuiſſimæ.

Nota. Quemadmodum ex conceptu lineæ, & curuitatis, manifeſtum eſt: lineam curuam, amiſſa ſola curuitate rectam fieri poſſe; ita ex conceptu ſuperficiei, & curuitatis quæ conuenit ſuperficiei cylindricæ, manifeſtum eſt, ſuperficiem cylindricam explanari poſſe: ſiue ita amittere poſſe ſuam curuitatem, vt nulla fiat variatio in magnitudine, vel ipſius ſuperficiei, vel linearum deſcriptarum in tali ſuperficie, vel linearum ſuperficiem terminantium; quo caſu intelligo ſuperficiem cylindricam præciſè explanatam eſſe: adeo vt ſuperficies cylindrica, à ſeipſa præciſè tantum explanata, non aliter differat, quam quo ad modum extenſionis, ſed nullo modo differat, quo ad extenſionem conuenientem, aut toti ſuperficiei, aut parti eius, aut lineis quæ talem ſuperficiem terminant, aut in illa deſcriptæ ſunt. Iam vero data quauis cylindrica ſuperficie A B C, dari poſſe, ſiue poſſibilem eſſe ſuperficiem planam K L M, ſie vt illæ duæ ſuperficies tantum præciſè differant, quo ad modum extenſionis: mihi videtur non minus manifeſtum, quam reliqua Geometriæ poſtulata: quare illud aſſumo ſine vlteriori probatione, tametſi inferri poſſet ex ijs, quæ diximus de geneſi ſuperficiei cylindricæ. Igitur ſuppoſita poſſibilitate hypotheſis de qua hic agitur, & in qua aſſumitur, dari poſſe ſuperficiem cylindricam A B C, præciſè tantum explanatam ſiue dari poſſe planam ſuperficiem K L M, quæ à cylindrica ſuperficie A B C, non aliter differat, quam quo ad modum extenſionis; venio ad demonſtrationem veritatum aſſertarum in hac hypotheſi.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim duæ ſuperficies A B C, & K L M, non differunt inter ſe, quo ad longitudinem, aut breuitatem linearum terminantium iſtas ſuperficies: ſed per hypotheſim

tres lineæ quæ terminant superficiem cylindricam A B C, singulæ sunt breuissimæ: ergo etiam tres lineæ quæ terminant superficiem planam K L M, singulæ sunt breuissimæ, atqui lineæ breuissimæ quæ terminant superficiem planam, singulæ sunt rectæ lineæ: ergo tres lineæ quæ terminant planam superficiem K L M, singulæ sunt rectæ lineæ: ergo figura plana K L M terminatur tribus rectis lineis. ergo figura plana K L M est triangulum rectilineum. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per hypothesim duæ superficies A B C & K L M, non differunt quo ad longitudinem aut breuitatem linearum quibus terminantur: sed tres lineæ quibus terminatur superficies cylindrica A B C, singulæ non sunt breuissimæ: ergo tres lineæ quibus terminatur superficies plana K L M, singulæ non sunt breuissimæ: atqui lineæ quæ terminant superficiem planam, & non sunt breuissimæ, etiam non sunt rectæ lineæ: ergo tres lineæ quæ terminant superficiem planam K L M, singulæ non sunt rectæ lineæ: ergo superficies plana K L M, terminatur lineis quæ singulæ rectæ non sunt: ergo superficies plana K L M, non est triangulum rectilineum. Quod erat secundum.

Theorema XVI.

Sit quodlibet triangulum cylindricum A B C, terminatum lineis breuissimis; præterea linea A B, sit breuissima, quæ per cylindricam superficiem duci potest, à puncto A ad lineam C B, quantumcunque, sed tamen breuissimè productam.

Fig. 58.

Dico primo, triangulum cylindricum A B C, præcisè tantum explanatum, esse triangulum rectangulum.

Dico secundo, A B *in* B C *per* 2 = triangulo cylindrico A B C.

Constructio. Triangulum cylindricum præcisè tantum explanatum, repræsentet figura plana K L M.

Demonstratur prima pars. Per constructionem, figura plana K L M repræsentat triangulum cylindricum A B C præcisè tantum explanatum: sed per hypothesim in triangulo cylindrico A B C, linea A B est breuissima, quæ per cylindricam superficiem duci potest à puncto A ad lineam C B breuissimè productam; ergo etiam in plana superficie K L M, linea K L est breuissima, quæ duci potest à puncto K ad lineam M L: atqui per hypothesim, & theorema 15, patet figuram K L M esse triangulum rectilineum: ergo in triangulo rectilineo K L M, linea recta K L est breuissima quæ duci potest à puncto

K ad

K ad lineam rectam M L: ergo in triangulo rectilineo K L M angulus K L M rectus est: ergo triangulum rectilineum K L M est rectangulum: sed etiam triangulum rectilineum K L M est triangulum cylindricum A B C præcisè tantum explanatum: ergo triangulum cylindricum A B C præcisè tantum explanatum, est triangulum rectangulum. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per constructionem, figura K L M, est triangulum cylindricum A B C præcisè tantum explanatum: ergo linea K L = lineæ A B: item linea L M = lineæ B C: item figura K L M = triangulo cylindrico A B C; sed quoniam per primam partem, figura K L M est triangulum rectilineum atque rectangulum, per dicta de ductibus Geometricis, patet, K L *in* L M *per* 2 = figuræ K L M: ergo etiam A B *in* B C *per* 2 = triangulo cylindrico A B C. Quod erat secundum.

Theorema XVII.

TRiangulum cylindricum A B C terminatum sit lineis breuissimis; & præterea linea A B sit breuissima quæ per cylindricam superficiem duci potest à puncto A ad lineam C B breuissimè productam. Denique linea B E sit breuissima quæ ex puncto B duci potest ad lineam A C breuissimè productam. *Fig.* 58.

Dico primo. A E *ad* E B = E B *ad* E C.

Dico secundo. A C *ad* C B = C B *ad* E C.

Dico tertio. A C *ad* A B = A B *ad* A E.

Dico quarto. A C 2 = A B 2 † C B 2.

Constructio. Superficiem cylindricam A B C E, præcisè tantum explanatam, repræsentet figura K L M R.

Demonstrantur tres priores assertiones. Per constructionem figura plana K L M R, est superficies cylindrica A B C E, præcisè tantum explanata: ergo per hypothesim & theorema præcedens, patet, totam figuram K L M, esse triangulum rectilineum atque rectangulum: quodque in triangulo rectilineo atque rectangulo K L M, linea recta L R, sit perpendicularis ad basim K M; ergo per theor. 10. partis 3. huius Ideæ, K R *ad* R L = R L *ad* R M; & præterea, K M *ad* K L = K L *ad* K R: ac denique, K M *ad* M L = M L *ad* R M; atqui per constructionem, patet K M = A C: item A C = A B: item M L = C B: item R L = E B: item K R = A E: item R M = E C; ergo, etiam A E *ad* E B = E B *ad* E C; & præterea, A C *ad* C B = C B

ad E C: & denique A C *ad* A B = A B *ad* A E. Vt dicitur in tribus prioribus assertionibus.

Demonstratur quarta assertio. Per 3. assertionem, A C *ad* A B = A B *ad* A E: ergo per axioma 3. partis 4. huius Ideæ, A C *in* A E = A B 2: & similiter quia per secundam assertionem A C *ad* C B = C B *ad* E C, etiam A C *in* E C = C B 2: ergo, A B 2 † C B 2 = A C *in* A E & † A C *in* E C = A C *in* A E † E C; sed quoniam A E † E C = A C, etiam A C *in* A E † E C = A C 2: ergo, A C 2 = A B 2 † C B 2. Quod erat quartum.

Theorema XVIII.

Cuiuscunque figuræ cylinder rectus sit O L, cuius duo latera sint O M & P L; baseos circumferentia sit O Z P; sectio plana A P F, sit perpendicularis ad planum O M L P. Denique linea O F, sit breuissima quæ per cylindricam superficiem duci potest à puncto O ad lineam A F P. *Fig.60.*

Dico primo, O Z P *ad* A F P = O F *ad* O A.

Dico secundo, O Z P *ad* O A = P F *ad* O F.

Demonstratur prima pars. Per theorema 16. patet O Z P *in* O A *per* 2 = cylindrico triangulo O Z P A: & præterea A F P *in* O F *per* 2 = eidem cylindrico triangulo O Z P A: ergo, O Z P *in* O A *per* 2 = A F P *in* O F *per* 2: ergo, O Z P *in* O A = A F P *in* O F: ergo per axioma 3. partis 4. huius Ideæ, O Z P *ad* A F P = O F *ad* O A. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per theorema 17, patet, A F P *ad* O Z P = O Z P *ad* P F. & etiam A F P *ad* O A = O A *ad* A F: ergo, A F P *in* P F = O Z P 2: & etiam A F P *in* A F = O A 2: ergo A F P *in* P F *ad* A F P *in* A F = O Z P 2 *ad* O A 2; Sed per theor. 4 partis 4 huius Ideæ, A F P *in* P F *ad* A F P *in* A F = P F *ad* A F: ergo O Z P 2 *ad* O A 2 = P F *ad* A F: sed quoniam per theorema præcedens, P F *ad* F O = F O *ad* A F, etiam per theor. 1. partis 5. huius Ideæ, P F 2 *ad* F O 2 = P F *ad* A F: ergo O Z P 2 *ad* O A 2 = P F 2 *ad* O F 2: ergo etiam, O Z P *ad* O A = P F *ad* O F. Quod erat secundum.

Theo-

Theorema XIX.

Cviuscunque figuræ cylinder obliquus, sit O L; duo eius æqualia latera, sint O M & P L: atque lineæ M X L & O Z P, singulæ sint breuissimæ per cylindri superficiem ducibiles à puncto M ad punctum L, & à puncto O ad punctum P. Præterea linea breuissima per cylindri superficiem ducta à puncto O ad latus P L, sit O R C. Fig. 61.

Dico O R C *in* O M = superficiei cylindricæ O Z P L M.

Constructio. Posita sit sectio D K L, parallela sectioni O R C.

Demonstratio. Ex hypothesi & constructione satis patet, cylindrum D L C O rectum esse, atq; adeo lineam D K L = lineæ O R C, item lineam O D = lineæ C L, ac denique lineam D M = lineæ C P: ergo O R C *in* C P *per* 2 = D K L *in* D M *per* 2: sed per theor. 16. etiam O R C *in* C P *per* 2 = cylindrico triangulo O C P; item D K L *in* D M *per* 2 = cylindrico triangulo D L M: ergo, O R C *in* D M = cylindrico triangulo O C P † cylindrico triangulo D L M: atqui etiam O R C *in* O D = cylindri recti superficiei D C: ergo O R C *in* O D † D M = cylindri recti superficiei D C † cylindrico triangulo O C P † cylindrico triangulo D L M = toti cylindricæ superficiei O L M P. Quandoquidem igitur O R C *in* O D † D M = O R C *in* O M, etiam O R C *in* O M = toti cylindricæ superficiei O L M P. Quod erat demonstrandum.

Theorema XX.

Cviuscunque figuræ cylinder rectus O L, habeat latera O M & P L: sitque sectio A B X parallela basi O P Z: & recta A O sit æqualis rectæ A M. Præterea positæ sint duæ aliæ cylindri sectiones planæ A P Q, & M B R, perpendiculares ad planum O M L P. Denique ducta sit recta A K, perpendicularis ad planum A B R. Fig. 62.

Dico primo, segmentum A P O = segmento M B A.

Dico secundo, sectionem planam O P Z *ad* sectionem planam A P Q = rectæ O P *ad* rectam A P.

Primæ assertionis veritas, si probatione indiget, potius videtur indigere terminorum expositione, quam discursu quo ex demonstra-

tis inferatur: quare ne hic resumenda sit superius tradita terminorum expositio, tantum insinuo diuersa capita, ex quibus prima assertio videtur immediatè manifesta.

Primo. Ex modo quo diximus cylindrum produci ex basi præcisè tantum vecta per latus, videtur immediatè manifestum, totum segmentum A P O præcisè tantum vectum per rectam lineam P B, peruenire ad locum segmenti M B A: adeoque segmenta illa esse inter se æqualia.

Secundo. Ex theoremate 8. vel fortassis, etiam ex hypothesi & conceptu cylindri, satis patet, sectionem O P Z æqualem & similem esse sectioni A B X: item sectionem A P Q esse æqualem & similem sectioni A B R: ac denique rectam O A = rectæ A M: adeoque segmenta A P O & M B A esse corpora æqualibus atque similibus superficiebus terminata & consequenter esse inter se æqualia.

Tertio. Satis manifestum videtur, quod segmentum A P O additum segmento A P B, ita vt maiora istorum segmentorum plana sint communia, efformare cylindrum A B P O: eadem vero segmenta simul addita, vt minora istorum segmentorum plana sint communia, efformare cylindrum A M B P: adeoque cylindrum A B P O = cylindro A M B P: & consequenter ablato communi segmento A P B, relqua segmenta A P O & M B A esse inter se æqualia.

Quarto. Quemadmodum manifestum est lineas rectas O P & A P, præcisè tantum vectas per rectam P B, producere æquales superficies: eo ipso quod puncta terminantia rectas O P & A P, deferantur per easdem rectas lineas; ita etiam videtur notum ex terminis, duas planas superficies O P Z & A P Q, præcisè tantum vectas per rectam P B, producere solida æqualia inter se: eo ipso quod singula puncta linearum terminantium superficies O P Z & A P Q, deferuntur per easdem rectas lineas; cum igitur hoc fiat, quando superficies plana O P Z præcisè tantum vecta per rectam P B, producit cylindricum O A B P: & superficies plana A P Q, præcisè tantum vecta per rectam P B producit cylindrum A M B P: etiam cylinder O A B P = cylindro A M B P: & ablato communi segmento P A B, reliquum segmentum A P O = reliquo segmento M B A.

Demonstratur secunda pars. Per primam partem, segmentum A P O = segmento M B A: ergo addito vtrinque eodem segmento A P B, etiam rectus cylinder O A B P = obliquo cylindro A M B P: sed rectus cylinder O A B P = O P Z *in* O A: item obliquus cylinder A M B P = A P Q *in* A K: ergo O P Z *in* O A = A P Q *in* A K: ergo, per axioma 3 partis 4 Ideæ, O P Z *ad* A P Q = A K *ad* O A = A K *ad* A M; sed per hypothesim, & theorema 10. part. 3 Ideæ A K *ad* A M = A B.

= A B *ad* B M ⩏ O P *ad* A P: ergo sectio plana O P Z *ad* sectionem planam A P Q = rectæ O P *ad* rectam A P. Quod erat secundum.

Theorema XXI.

Sint duæ ellipses C D & G H, primæ ellipsis axis maior sit recta C D, minor axis sit recta E F. Secundæ ellipsis axis maior sit G H, minor axis sit I N. Fig. 63. & 64.

Dico circulum, I N *ad* circulum E F = I N 2 *ad* E F 2.

Dico secundo, circulum E F *ad* ellipsim C D = rectæ E F *ad* rectam C D.

Dico tertio, circulum I N *ad* ellipsim C D = I N 2 *ad* C D *in* E F.

Dico quarto, ellipsim G H *ad* ellipsim C D = G H *in* I N *ad* C D *in* E F.

Primæ assertionis sensus est, circulum I N ad circulum E F, habere eamdem proportionem, quam habet quadratum I N ad quadratum E F.

Demonstratur prima assertio. Per primum axioma hypotheticum cap. 12. part. 2. Ideæ, radius circuli I N *ad* radiũ circuli E F = circumferentiæ circuli I N *ad* circumferentiam circuli E F: atqui radius circuli I N *in* circumferentiam circuli I N ductu quarto = circulo I N, item radius circuli E F *in* circumferentiam circuli E F ductu quarto = circulo E F: ergo per assertionem 5. theorematis 1. partis 5. Ideæ, circulus I N *ad* circulum E F = I N 2 *ad* E F 2. Quod erat primum.

Secundæ assertionis sensus est, circulum E F ad ellipsim C D, habere eamdem rationem, quam habet linea recta E F ad lineam rectam C D.

Constructio pro demonstratione secundæ assertionis. Recta O P = rectæ E F: diametro O P descriptus circulus, sit basis cylindri recti O L, cuius duo opposita latera sint O M & P L. Præterea, recta P A = rectæ C D: sitque punctum A in recta O M. Denique plana sectio cylindrica A P Q, sit perpendicularis ad planum O M L P. Fig. 62.

Demonstratur secunda assertio. Per theor. 9. satis patet cylindri O L, sectionem planam A P Q, esse ellipsim, æqualem ellipsi C D: sed per theor. 20. etiam circulus O P *ad* sectionem planam A P = rectæ O P *ad* rectam P A: ergo circulus O P *ad* ellipsim C D = rectæ O P *ad* rectam P A ⩏ rectæ E F *ad* rectam C D vt patet ex constructione: ergo circulus descriptus diametro E F *ad* ellipsim C D = rectæ E F *ad* rectam C D. Quod erat secundum.

Tertiæ aſſertionis ſenſus eſt, circulum I N ad ellipſim C D, habere eamdem rationem, quam habet quadratum I N, ad rectangulum, cuius longitudo eſt C D, latitudo E F.

Demonſtratur tertia pars. Per primam aſſertionem, circulus I N *ad* circulum E F = I N 2 *ad* E F 2: ſed etiam per ſecundã aſſertionem, circulus E F *ad* ellipſim C D = E F *ad* C D: ergo per theor. 13. par. 4. Ideæ, circulus I N *ad* ellipſim C D = I N 2 *ad* E F 2 *in* E F *ad* C D: ſed per theor. 17. part. 4. Ideæ, I N 2 *ad* E F 2 *in* E F *ad* C D = I N 2 *in* E F *ad* E F 2 *in* C D ≏ I N 2 *ad* C D *in* E F: ergo circulus I N *ad* ellipſim C D = I N 2 *ad* C D *in* E F. Quod erat tertium.

Quartæ aſſertionis ſenſus eſt, ellipſim G H ad ellipſim C D, habere eamdem proportionem, quam habet rectangulum, cuius longitudo eſt G H, & altitudo I N, ad rectangulum cuius longitudo C D, & altitudo E F.

Demonſtratur quarta pars. Per aſſertionem ſecundam, ellipſis G H *ad* circulum I N = rectæ G H *ad* rectam I N: item per primam aſſertionem circulus I N *ad* circulum D F = I N *in* I N *ad* E F *in* E F ≏ I N *ad* E F *in* I N *ad* E F: denique per ſecundam aſſertionem, circulus E F *ad* ellipſim C D = E F *ad* C D: ergo per theorema 13. partis 4. Ideæ, ellipſis G H *ad* ellipſum C D = G H *ad* I N *in* I N *ad* E F *in* I N *ad* E F *in* E F *ad* C D; ſed per theorema 17. partis 4. Ideæ, G H *ad* I N *in* I N *ad* E F *in* I N *ad* E F *in* E F *ad* C D = G H *in* I N *in* I N *in* E F *ad* I N *in* E F *in* E F *in* C D ≏ G H *in* I N *ad* E D *in* C D: ergo ellipſis G H *ad* ellipſim C D = G H *in* I N *ad* E D *in* C D. Quod erat quartum.

Theorema XXII.

Sit quæuis ellipſis cuius maior axis ſit A B, minor axis ſit C D. Præterea rectæ C D, E F, & A B, ſint proportionales. Denique diametris C D, E F, & A B, ſint deſcripti circuli.

Fig. 65.

Dico primo, circulum E F = ellipſi A B.

Dico ſecundo, ellipſim A B *ad* circulum A B = rectæ C D *ad* rectam A B.

Dico tertio, circulum C D *ad* ellipſim A B = ellipſi A B *ad* circulum A B.

Demonſtratur prima pars. Per hypotheſim, C D *ad* E F = E F *ad* A B: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ, E F 2 = C D *in* A B ergo per theor. 2. partis 4. Ideæ, C D 2 *ad* E F 2 = C D 2 *ad* A B *in* C D: ſed per theor. 21. circulus C D *ad* circulum E F = C D 2 *ad* E F 2, & præterea circulus C D *ad* ellipſim A B = C D 2 *ad* A B *in* C D ergo

circu-

circulus C D *ad* circulum E F = circulo C D *ad* ellipsim C D: ergo per theor. 2. partis 4. Ideæ, circulus E F = ellipsi C D. Quod erat primum.

Demonstratur secunda pars. Per theor. 13. partis 4. Ideæ, C D *ad* A B = C D *ad* E F *in* E F *ad* A B: sed quoniam per hypothesim C D *ad* E F = E F *ad* A B, etiam C D *ad* E F *in* E F *ad* A B = E F *ad* A B *in* E F *ad* A B: ergo, C D *ad* A B = E F *ad* A B *in* E F *ad* A B: atqui per theor. 17. part. 4. Ideæ, E F *ad* A B *in* E F *ad* A B = E F *in* E F *ad* A B *in* A B ≏ E F 2 *ad* A B 2: ergo C D *ad* A B = E F 2 *ad* A B 2: atqui per theor. 21. circulus E F *ad* circulum A B = E F 2 *ad* A B 2: ergo circulus E F *ad* circulum A B = C D *ad* A B: sed per primam partem, circulus E F = ellipsi A B: ergo, ellipsis A B *ad* circulum A B = C D *ad* A B. Quod erat secundum.

Demonstratur tertia pars. Per hypothesim C D *ad* E F = E F *ad* A B: ergo, C D 2 *ad* E F 2 = E F 2 *ad* A B 2: atqui per theor. 21. circulus C D *ad* circulum E F = C D 2 *ad* E F 2 & præterea circulus E F *ad* circulum A B = E F 2 *ad* A B 2: ergo circulus C D *ad* circulum E F = circulo E F *ad* circulum A B sed per primam assertionem, circulus E F = ellipsi A B: ergo circulus C D *ad* ellipsim A B = ellipsi A B *ad* circulum A B. Quod erat tertium.

Theorema XXIII.

Sint duæ conicæ sectiones A B C & D E F, quæ singulæ sint parabolicæ, vel hyperbolicæ: atque anguli B A C sinus primus sit B C sinus secundus sit A C; similiter anguli E D F sinus primus sit E F, sinus secundus sit D F. *Fig. 66.*

Dico sectionẽ A B C *ad* sectionem D E F = A C *in* C B *ad* D F *in* E F.

Constructio. Posita sit sectio G H L, atque anguli H G L sinus primus H L = rectæ E F: & sinus secundus G L = rectæ A C; præterea angulus H G L sit parabolicus, si singuli anguli B A C & D E F sint parabolici, vel si isti duo anguli sint hyperbolici etiam angulus H G L sit hyperbolicus. Denique E F *ad* R = A C *ad* D F.

Demonstratio. Quandoquidem per constructionem A C = G L ex theoremate 11. vel 12. satis constat eiusdem cylindri sectiones esse A B C & G H L & similiter eiusdem cylindrici sectiones esse D E F & G H L, quia B C = H L: igitur per theorema 20 sectio A B C *ad* sectionem G H L = B C *ad* H L ≏ B C *ad* E F vt patet ex constructione. Præterea etiam per theor. 20. sectio G H L *ad* sectionem D E F = G L *ad* D F ≏ A C *ad* D F ≏ B C *ad* R vt etiam constat ex constru-

structione: ergo ex æquo sectio A B C *ad* sectionem D E F = B C *ad* R: sed per theorema 12. partis 4. Ideæ Logisticæ B C *ad* R = B C *ad* E F *in* E F *ad* R ≏ B C *ad* E F *in* A C *ad* D F cum per constructionem E F *ad* R = A C *ad* D F: ergo sectio A B C *ad* sectionem D E F = B C *ad* E F *in* A C *ad* D F, sed per theor. 17. part. 4. Ideæ Logisticæ B C *ad* E F *in* A C *ad* D F = B C *in* A C *ad* E F *in* D F: ergo sectio A B C *ad* sectionem D E F = B C *in* A C *ad* E F *in* D F. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

AN ex Mathematicis aliquis scripserit de superficiebus, quas hic appellauimus cylindrica triangula aut parallelogramma, prorsus ignoro; & si forte apud alios non inueniantur prædictarum figurarum considerationes: suspicari aliquis posset, eas, vel paruam, vel nullam vtilitatem annexam habere; præsertim, cum satis neglectim à me proponantur. Ego certe non vulgarem vtilitatem apprehendo in cylindricorum triangulorum atque parallelogrammorum consideratione, alibi à me fusius resumenda: quam ob rem, hoc loco tantum pauca aliqua volui proponere, vt appareat vsus nostræ Logisticæ in hac materia satis difficulter tractabili, atque fortassis ideo ab alijs non exculta, sed nullatenus neglecta; etenim nimis imprudens atque vitiosum negligendi genus foret, quod Mathematicum minus vtilibus occupando, ab vtilioribus diuerteret, atque induceret, vt mallet tempus perdere, quam vtiliter occupari; quod si faciunt ex modernis non pauci, qui inutilium problematum solutionibus libros implent: id nullatenus facere arbitror, tam peruerso mentis iudicio inducti; sed quod vtantur ea, aut Arithmetica, aut Geometrica, quæ commode assurgere non potest ad altiora. Vt melius appareat aliqua pars vtilitatis quam habent præcedentia theoremata, iuuare poterunt quæ hic noto.

PRimo cuiusuis propositi obliqui cylindri curuam superficiem mensurare, difficilius quidem, sed non minus vtile problema est, quam mensurare curuam recti cylindri superficiem. Secundi problematis solutio habetur, basis circumferentiam ducendo in totam recti cylindri altitudinem; vt satis immediate patet ex dictis de ductibus Geometricis; ex quibus non habetur primi problematis solutio: illa tamen immediate patet ex 19. theoremate: ex quo constat, quod lineam breuissimam cylindrum ambientem ducendo in latus cylindri, habeatur tota lateralis cylindri superficies; quod non

tantum

tantum verum est, de quouis cylindrico, cuiuscunque figuræ: verum etiam de quouis prismate, aut parallelepipedo: immo de quouis corpore, ex quacunque plana superficie producto, primo aut secundo ductu nostro Geometrico.

SEcundo. Quemadmodum apud Geometras maxime vtile problema est, inuenire proportionem quam habet quiuis circulus ad alium quemuis circulum; ita etiam non vulgarem vtilitatem habet problema, quod docet inuenire proportionem, quam habet quiuis circulus ad quamuis ellipsim, vel quæuis ellipsis ad aliam quamuis ellipsim. Iam vero ex theoremate 21. immediatè habetur illorum problematum solutio, & constat, circulum ad circulum, item circulum ad ellipsim, item ellipsim ad ellipsim, habere eamdem proportionem, quam habent inter se rectangula, circulorum diametris, aut ellipsium axibus contenta, aut terminata. Exempli gratia supposito quod rectangulum X, habeat tàm basim, quàm altitudinem æqualem diametro A B: item rectangulum P, habeat basim æqualem axi G H, altitudinem vero æqualem axi I N: denique rectangulum Q, habeat basim æqualem axi A B, altitudinem vero æqualem axi C D; etiam verum erit, primo, circulum I N *ad* circulum A B = rectangulo X *ad* rectangulum Z. Secundo, circulum I N *ad* ellipsim A B = rectangulo X *ad* rectangulum Q. Tertio, ellipsim G H *ad* ellipsim A B = rectangulo P, *ad* rectangulum Q. *Fig. 63. & 65.*

TErtio. In tota Geometria, nullum nisi fallor problema inuenitur, pro cuius solutione inquærenda tantum olei consumptum sit, quam illud, in quo quæritur proportio quam habet diameter circuli ad circumferentiam eiusdem circuli: aut quadratum cuius basis est circuli diameter, ad ipsum circulum; quod problema aliter apellatur circuli quadratura. Nemo hactenus inuentus est, qui in rigore Geometrico soluerit prædictum problema, tametsi certo constet, solui posse; vtrum legitimam eius solutionem ego inuenerim, tunc alij statuent, quando publici iuris facta fuerint, quæ hactenus inter priuata mea scripta delitescunt. Prædicti problematis solutio, non quidem numeris omnibus absoluta, sed tamen pro praxi satis vtilis, allata est ab Archimede: qui statuit circuli diametrũ ad eiusdem circuli circumferentiam proximè habere eam rationem, quam 7 habet ad 22; hac proportione magis exactam alii plures annotarunt, atque inter illas quæ paruis numeris expresse afferuntur, & consequenter commodiores sunt: cæteris videtur præferenda proportio, quam habet 113 ad 355: quæ parum differt à vera proportione quam habet diameter circuli ad circumferentiam eiusdem circuli; hac, vel etiam quauis data alia proportione à vera aberrante,

aliam

aliam magis exactam inuenire, difficile non est: dummodo licitum sit maiores numeros adhibere: eam afferre quæ à vera non aberret, nihil aliud est, quam circuli quadraturam inuenire, ac soluere problema, quod diximus hactenus insolutum, tametsi euidens sit, eius solutionem possibilem esse: His prænotatis circa circuli quadraturam, noto tria diuersa problemata, quæ singula etiam hactenus soluta non sunt: eam tamen cum circuli quadratura affinitatem habent, vt inuenta circuli quadratura etiam facile habeatur istorum problematum solutio: atque viciſſim, inuenta solutione cuiuslibet ex tribus istis problematibus, sine difficultate inferatur circuil quadratura.

Primum sit. Inuenire proportionem quam habet ellipsis, ad rectangulum contentum axibus eiusdem ellipseos.

Secundum sit. Inuenire proportionem quam habet circuli circumferentia, ad circumferentiam ellipseos.

Tertium sit. Inuenire angulum rectilineum, æqualem proposito angulo trianguli cylindrici breuiſſimis lineis terminati, atque præcisè tantum explanati.

Hæc problemata non propono, quasi plura alia non inuenirentur, quæ eamdem affinitatem habeant cum circuli quadratura: sed quia pertinent ad materiam de triangulis atque parallelogrammis cylindricis, de cuius vtilitate pauca aliqua placuit insinuare; etenim si paulo ante stabilita theoremata vera sint, negari non potest, etiam verum esse, quod hic asseruimus de affinitate quam habet circuli quadratura, cum vnoquoque problemate hic proposito.

Fig. 63. & 65. Supposita circuli quadratura, habetur proportio, quam quadratum cuius basis est I N, habet ad circulum diametro I N descriptum: sed per theor. 12, etiam habetur proportio circuli I N ad ellipsim A B: ergo supposita circuli quadratura, etiam habetur proportio quam habet quadratum cuius basis est I N ad ellipsim A B: quandoquidem hæc proportio, ex duobus prioribus sit composita. Similiter cognita proportione quam haber rectangulum contentum ellipseos axibus A B & C D, ad ellipsim A B: cum insuper ex theoremate 12, constet, quam proportionem habeat ellipsis A B ad circulum I N, etiam innotescit proportio, ex duabus prioribus proportionibus composita, hoc est proportio rectanguli contenti ellipseos axibus A B & C D, ad circulum I N: & consequenter, cognita solutione primi problematis hic propositi, habetur circuli quadratura.

Fig. 58. Supposita circuli quadratura, quodque linea B C sit dimidia circuli circumferentia, habetur proportio rectæ O P, ad lineam B C: & consequenter nota est proportio rectæ A B ad circulrem B C: ac mani-

manifestum est, quomodo construi possit planum triangulum K L M, in quo angulus L rectus sit, & linea K L æqualis A B, item linea L M æqualis B C: quo facto, manifestum est triangulum A B C præcisè tantum explanatum, esse K L M: ac lineam ellipticam A C = K M: quæ singula satis manifesta sunt ex ijs quæ paulo ante tradita sunt de triangulis cylindricis. Similiter cognita proportione quam habet circularis linea B C, ad ellipticam lineam A C: cum per theorema 18, constet, huic proportioni æqualem esse proportionem rectæ lineæ A B, ad ellipticam B E cognita sit recta linea L R, æqualis ellipticæ, B E: & manifestum est, quomodo prius ponendo rectam K L, æqualem rectæ A B, deinde centro L, ac radio L R describendo arcum, duci possit recta K R, descriptum arcum tangens in R: ac præterea recta L M perpendicularis ad K L, quæ rectæ K R productæ occurrat in M; quibus peractis, satis manifestum est triangulum A B C præcisè tantum explanatum, esse K L M: adeoque inuentam esse rectam lineam L M, æqualem circulari lineæ B C: atque haberi circuli quadraturam.

Supposita circuli quadratura, cognita est proportio lineæ rectæ A B, ad circulum B C: neque difficultatem habet ponere rectum angulum K L M, ita vt K L = A B, & insuper A B *ad* B C = K L *ad* L M: ac denique ducere rectam K M; quibus peractis, triangulum A B C præcisè tantum explanatum erit K L M: adeoque angulus rectilineus M, æquatur trianguli cylindrici angulo C, quando triangulum A B C præcisè tantum explanatum est. Rursus supposito modo ponendi angulum rectilineum K M L, qui æqualis sit angulo C, quando triangulum A B C præcisè tantum explanatum est: difficultatum non habet, rectæ L M ponere parallelam, atque ab ipsa distantem interuallo A B: & ex puncto K, in quo posita parallela occurrit rectæ M K, ducere rectam K L, perpendicularem *ad* M L; quibus peractis, triangulum A B C præcisè tantum explanatum, erit K L M: adeoque habetur linea recta L M, æqualis circulari lineæ B C: & consequenter circuli quadratura.

QVarto, figura X *ad* figuram Z = A C *in* B C *ad* D F *in* F E.

Primo, si vtraque figura X & Z sit pararellogrammum planum aut cylindricum: neque refert, an vtrumque parallelogrammum X & Z planum sit, aut vtrumque sit cylindricum, vel certe vnum sit planum & alterum cylindricum: dummodo bases sint A C & D F, altitudines vero sint C B & F E.

Secundo, si vtraque figura X & Z, sit triangulum breuissimis lineis terminatum, planum vel cylindricum: siue vtrumque sit planum, aut vtrumq; sit cylindricum, vel certe vnum sit planum alterum cylindri-

cum:dūmodo bases sint A C & D F, altitudines vero sint C B & F E.

Tertio, si figuræ X & Z sint sectores circulorum, quorum radij sint A C & D F: arcus vero sectorum sint C B & F E.

Quarto, si figuræ X & Z sint sectiones ellipticæ, atque maiorum axium medietates sint A C & D F: minorum vero axium medietates sint C B & F E.

Quinto, si figura X sit quadrās circuli, cuius radij sint A C & C B; & figura Z sit sectio elliptica eiusq; axiū medietates sint D F & F E.

Sexto, si figuræ X & Z sint parabolicæ sectiones, & parabolicorum angulorum sinus secundi sint A C & D F, primi vero sinus sint C B & F E.

Septimo, si figuræ X & Z sint hyperbolicæ sectiones, & hyperbolicorum angulorum sinus secundi sint A C & D F: primi vero sinus sint C B & F E.

QVinto, proportio A C *in* C B *ad* figuram X = 6 *ad* 4: supposito quod figura X sit sectio parabolica, atque anguli parabolici sinus primus sit A C, & secundus sinus sit C B. Hanc veritatem (hactenus à nobis non propositam, sed suo loco demonstrandam) ab Archimede legitime probatam esse, testatur communis consensus Mathematicorum; apud quos necdum habetur, sed desideratur notitia proportionis quam habet A C *in* C B *ad* figuram X. Primo, supposito quod figura X sit quadrans circuli cuius radij sint A C & C B. Secundo supposito quod figura X sit sectio elliptica, atque maioris axis medietas sit A C: minoris vero axis medietas sit C B. Tertio, supposito quod figura X sit sectio hyperbolica atque hyperbolici anguli sinus primus sit C B, secundus A C. Theorema quod hic diximus legitime probatum ab Archimede, aliter appellatur parabolæ quadratura ex alijs tribus theorematibus quæ hactenus desiderantur: primum, aliter dicitur circuli quadratura, secundum, aliter dicitur ellipseos quadratura; tertium, aliter dicitur hyperbolæ quadratura. Aliqui Ageometræ sibi imaginantur impossibilem esse circuli quadraturam, ex eo capite, quod exempli gratia circuli quadrans aliqua ex parte curua linea terminetur, quadratum vero omni ex parte terminetur rectis lineis. Quare si forte alicuius mentem huiusmodi suspicio occupaset, reflectere poterit sectionem parabolicam, etiam aliqua ex parte terminari curua linea: & tamen huius sectionis quadraturam ab Archimede inuentam esse, in confesso est apud Geometras. Deinde propemodum innumeræ sunt figuræ, quarum quadratura à diuersis Geometris inuenta est, licet tales figuræ, vel aliqua, vel omni ex parte terminentur circulorum arcubus; verum de his alias.

IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS SEPTIMA.

ARGVMENTVM.

PRoponuntur aliqua problemata Arithmetica exercitij gratia soluta ab auditoribus meis. Ex his prænobilis Dominus Franciscus Zeccadorus Seminarij Romani conuictor, dum hæc scribo, vix tertium in studijs Mathematicis mensem absoluit, ab ipsis primis principijs sumendo exordium. A teoteneram vt ita dicam ætatem non sapit subsequens exercitatio Logistica, tamen non continet nisi specimen eorum quæ prædicto tempore assequutus est in scientijs Mathematicis. Reliqua quæ aut didicit, aut proprio marte composuit, prætermittuntur, quandoquidem pro septima parte Ideæ nostræ Logisticæ tantummodo requir tur aliqua Logistica exercitatio spectans ad Arithmeticam, quemadmodum in quinta parte proposita est altera exercitatio Logistica magis propriè pertinens ad Geometriam.

Prænobilis Domini FRANCISCI ZECCADORI Logistica Exercitatio.

In qua Logisticis discursibus soluuntur varia problemata Arithmetica.

Problema I.



Etenti, quæ diei hora ſit: reſponſum fuit, ſeptem nonæ partes horarum præteritarum, conſtituunt reſiduas diei horas.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Horæ præteritæ ſint A: ergo per hypotheſim, horæ reſiduæ erunt 7 A *per* 9: ergo per hypotheſim, A & † 7 A *per* 9 = 24: ſed A = 9 A *per* 9: ergo 9 A *per* 9 & † 7 A *per* 9 = 24; ergo 16 A *per* 9 = 24; ergo per prob. 4 cap. 5. lib. 1. Logiſticæ, 16 A = 24 *in* 9: ſed 24 *in* 9 = 216: ergo 16 A = 216; ergo A = 13$\frac{1}{2}$; ergo hora quæſita eſt decima tertia cum dimidia.

Problema II.

Petenti, quæ hora ſit: reſponſum fuit, diei horæ præteritæ ductæ in reſiduas, producunt horas 2$\frac{63}{64}$.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Horæ præteritæ ſint B, reſiduæ ſint C, denique B — C ſit A. His poſitis B — C *q* = A 2: ergo, per theor. 1. appendicis lib. 2. Logiſticæ, A 2 & † B *in* 4 C = B † C *q*: ſed quoniam per hypotheſim A *in* C = 2$\frac{63}{64}$ ≏ $\frac{191}{64}$, etiam B *in* 4 C = $\frac{191}{16}$; & præterea per hypotheſim, B † C = 24, adeoque B † C *q* = 576: ergo A 2 & † 191 *per* 16 = 576: ergo per Antitheſim, A 2 = 576

$=576$ & -191 *per* 16: sed $576 = 9216$ *per* 16: ergo A2 $= 9216$ *per* 16 & -191 *per* 16: ergo A2 $= 9025$ *per* 16: ergo A $= 95$ *per* 4: ergo B $-$ C $= 23\frac{1}{4}$: sed etiã B $+$ C $= 24$: ergo per probl. 1. cap. 1. lib. 2. Logisticæ, numerorum B & C minor est $\frac{1}{8}$, maior est $23\frac{7}{8}$: ergo hora quæsita, vel est dimidius quadrans, vel vigesima tertia cum septem dimidijs quadrantibus vnius horæ: nam in titulo problematis determinatum non est, an maior, vel certe minor pars effluxerit: adeoque in solutione id statui non potest.

Problema III.

Interrogatus aliquis, quot lectionibus interfuerit: respondit, lectionum quibus interfui sexta pars ducta in octauam partem, producit earumdem lectionum dimidiam partem.

Quæritur quot lectionibus interfuerit.

Solutio. Numerus lectionum sit A: ergo per hypothesim $\frac{A}{6}$ *in* $\frac{A}{8} = \frac{A}{2}$: sed $\frac{A}{2} = \frac{A}{2}$ *in* 1: ergo $\frac{A}{6}$ *in* $\frac{A}{8} = \frac{A}{2}$ *in* 1: ergo, per theor. 4. cap. 8. lib. 1. Logisticæ, $\frac{A}{6}$ *ad* $\frac{A}{2} =$ 1 *ad* $\frac{A}{8}$: sed per theor. 7. ibidem, $\frac{A}{6}$ *ad* $\frac{A}{2} =$ 2 *ad* 6: ergo 2 *ad* 6 $=$ 1 *ad* $\frac{A}{8}$: ergo per theor. 4. cap. 8. lib. 1. Logisticæ, 2 *in* $\frac{A}{8} = 6$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{8} = 6$: ergo per probl. 4. cap. 5. lib. 1. Logisticæ, 2 A $= 6$ *in* 8: ergo 2 A $= 48$: ergo A $= 24$: ergo lectiones quibus interfuit sunt 24.

Pro-

Problema IV.

INterrogatus aliquis, quot libri paginas legiſſet: reſpondit, paginarum quas legi nona pars ducta in duodecimam partem, producit duas tertias partes earumdem paginarum.

Quæritur quot paginas legerit.

Solutio. Paginarum numerus ſit A: igitur $\frac{A}{9}$ *in* $\frac{A}{12} = \frac{2A}{3}$: ſed $\frac{2A}{3} = \frac{2A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{A}{9}$ *in* $\frac{A}{12} = \frac{2A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{A}{9}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: ergo $\frac{2A}{18}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: atqui per theor. 10. part. 4. Ideæ $\frac{2A}{18}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 3$ *ad* 18: ergo 3 *ad* $18 = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: ergo 3 *in* $\frac{A}{12} = 18$ *in* 1: ergo $\frac{3A}{12} = 18$: ergo 3 A $= 18$ *in* 12: ergo 3 A $= 216$: ergo A $= 72$: ergo legit ſeptuaginta duas paginas.

Problema V.

INterrogatus aliquis, quot diebus abfuerit ab Vrbe: reſpondit, dierum quibus abfui ab Vrbe duæ nonæ partes ductæ in vnam tertiam partem, producunt ſexdecim tertias partes eorumdem dierum.

Quæritur quot diebus abfuerit ab Vrbe.

Solutio. Dies quibus abfuit ab Vrbe ſint A: ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $\frac{A}{3} = \frac{16A}{3}$: ſed $\frac{16A}{3} = \frac{16A}{3}$ *in* 1; ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $\frac{A}{3} = \frac{16A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $1 = \frac{16A}{3}$ *ad* $\frac{A}{3}$: atqui $\frac{16A}{3}$ *ad* $\frac{A}{3} = 16$ *ad* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $1 = 16$ *ad* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $1 = 16$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{9} = 16$: ergo 2 A $= 16$ *in* 9: ergo 2 A $= 144$: ergo A $= 72$; ergo dies quibus abfuit ab Vrbe sũt ſeptuaginta duo.

Pro-

Problema VI.

Pastor interrogatus, quot Oues numeret: respondit suarum Ouium duas nonas partes, ad sexdecim tertias partes, habere eamdem proportionem quam tres Oues habent ad omnes Oues quas numerat.

Quæritur quot Oues numeret.

Solutio. Ouium numerus sit A: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 3$ *ad* A: ergo singulos antecedentes terminos ducendo in 8, etiam $\frac{16A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 24$ *ad* A: sed $\frac{16A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 3$ *ad* 9 = 1 *ad* 3: ergo 1 *ad* 3 = 24 *ad* A: ergo 1 *in* A = 3 *in* 24: ergo A = 72: ergo Oues quas numerat sunt septuaginta duæ.

Problema VII.

Interrogatus aliquis, quot milliariorum iter confecerit: respondit, quod si ex duabus nonis partibus milliariorum totius itineris, auferantur octo milliaria: reliquus milliariorum numerus, ad tria milliaria, habebit eamdem proportionem, quam octo tertiæ partes totius confecti itineris, habent ad totum iter.

Quæritur quot milliariorum iter confecerit.

Solutio. Confectorum milliariorum numerus sit A: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *ad* $3 = \frac{8A}{3}$ *ad* A = $\frac{8A}{3}$ *ad* $\frac{3A}{3}$ = 8 *ad* 3: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *ad* 3 = 8 *ad* 3: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *in* 3 = 3 *in* 8: ergo $\frac{6A}{9} - 24 = 24$: ergo $\frac{6A}{9} = 24 + 24$: ergo $\frac{6A}{9} = 48$. ergo 6 A = 48 *in* 9: ergo 6 A = 432: ergo A = 72: ergo itineris confecti milliaria sunt septuaginta duo.

Pro-

Problema VIII.

INterrogatus aliquis, quantam noctis partem ſtudio impenderit: reſpondit, temporis ſtudio dati, pars tertia, ducta in dimidiam partem, producit vnam octauam partem eiuſdem temporis ſtudio dati.

Quæritur quantam noctis partem ſtudio impenderit:

Solutio prima. Tempus ſtudij ſit A; ergo per hypotheſim $\frac{A}{3}$ *in* $\frac{A}{2} = \frac{A}{8}$: ergo $\frac{A^2}{6} = \frac{A}{8}$: ergo A^2 *in* $8 =$ A *in* 6: ergo $8\,A^2 = 6\,A$: ergo per prob. 2. cap. 5. lib. 1. Logiſticæ, $8\,A = 6$: ergo $A = \frac{6}{8} \simeq \frac{3}{4}$: ergo tempus ſtudio datum ſunt tres quartæ partes noctis.

Secunda ſolutio. Tempus ſtudij ſit A; ergo per hypotheſim $\frac{A}{3}$ *in* $\frac{A}{2} = \frac{A}{8}$: ergo $\frac{A}{3}$ *ad* $\frac{A}{8} =$ 1 *ad* $\frac{A}{2}$: ſed per theor. 7. cap. 8. lib. 1. Logiſticæ. Vel per theo. 10. partis 4. Ideæ, $\frac{A}{3}$ *ad* $\frac{A}{8} =$ 8 *ad* 3: ergo 8 *ad* 3 = 1 *ad* $\frac{A}{2}$: ergo per axioma 3. partis 4. Ideæ, $\frac{8A}{2} = 3$: ergo $8\,A = 6$: ergo $A = \frac{6}{8} \simeq \frac{3}{4}$: ergo tres quartæ partes noctis conſtituunt tempus datum ſtudio.

Problema IX.

INterrogatus aliquis, qua noctis hora contigerit æquinoctium: reſpondit, quando quatuor ſeptimarum partium reſiduæ noctis, pars quinta effluxerat.

Quæritur quo tempore contigerit æquinoctium;

Solutio prima. Horæ noctis præteritæ ſint B, reſi-

duæ noctis horæ sint A: ergo per hypothesim $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $=$ B: ergo $\frac{4A}{35} = $ B: sed quoniam tempore æquinoctij tota nox est 12 horarum, etiam $12 - A = B$: ergo $\frac{4A}{35} = 12 - A$: ergo $4A = 12 - A$ *in* 35: ergo $4A = 420 - 35A$: ergo $4A + 35A = 420$: ergo $39A = 420$: ergo $A = 10\frac{30}{39}$: ergo $B = 1\frac{9}{39} = 1\frac{3}{13}$: ergo æquinoctium contigit, noctis hora prima cum tribus decimis tertijs partibus vnius horæ.

Solutio secunda. Residuæ noctis horæ sint A: ergo residuarum horarum quatuor septimæ partes erunt $\frac{4A}{7}$: ergo per hypothesim $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $=$ horis præteritis: sed tempore æquinoctij noctis horæ præteritæ simul cum residuis sunt horæ 12: ergo $\frac{4A}{7}$ *per* 5 & $+ A = 12$: sed $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $= \frac{4A}{35}$: ergo $\frac{4A}{35} + A = 12$: ergo $\frac{4A}{35} + \frac{35A}{35} = 12$: ergo $\frac{39A}{35} = 12$: ergo $39A = 12$ *in* 35: ergo $39A = 420$: ergo $A = 10\frac{30}{39}$: ergo noctis pars residua continet horas $10\frac{30}{39}$: ergo noctis pars præterita continet vnam horam cum nouem trigesimis nonis partibus vnius horæ; siue vnam horam cum tribus decimis tertijs partibus vnius horæ.

Problema X.

VNa cum Mulo vinum portabat Asella:
Atque suo grauiter, seu pondere pressa gemebat;
Talibus & dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges, teneræ de more puellæ?
Dupla tuis si des mensuram pondera gesto;

At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Quæritur quot menſuræ à ſingulis deferantur.

Solutio. Muli menſuræ ſint A: item Aſellæ menſuræ ſint B: ergo per hypotheſim $A - 1 = B + 1$: ergo $A - 2 = B$: ergo $A - 3 = B - 1$; ſed etiam per hypotheſim $A + 1$ *ad* $B - 1 = 2$ *ad* 1: ergo $A + 1$ *ad* $A - 3 = 2$ *ad* 1: ergo $A - 3$ *in* $2 = A + 1$ *in* 1: ergo $2A - 6 = A + 1$: ergo $2A - A = 6 + 1$: ergo $A = 7$: ergo Muli menſuræ ſunt 7; & quia oſtenſum eſt $A - 2 = B$: etiam $B = 7 - 2 = 5$; ergo Aſellæ menſuræ ſunt 5.

Problema XI.

Surgite lanificæ, lux eſt, reliquæque diei,
Octarum effluxit portio quinta trium.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Diei horæ præteritæ ſint B: horæ reſiduæ ſint A: ergo per hypotheſim $\frac{1A}{8}$ *per* $5 = B$: ergo $\frac{1A}{8}$ *in* $\frac{1}{5} = B$: ergo $\frac{1A}{40} = B$: ſed etiam per hypotheſim $12 - A = B$: ergo $\frac{1A}{40} = 12 - A$: ergo $3A = 12 - A$ *in* 40: ergo $3A = 480 - 40A$: ergo $3A + 40A = 480$: ergo $43A = 480$: ergo $A = 11\frac{7}{43}$: ergo $12 - A = 12 - 11\frac{7}{43} = \frac{36}{43}$: Sed $12 - A = B$: ergo $B = \frac{36}{43}$; igitur elapſæ ſunt triginta ſex quadrageſimæ tertiæ partes vnius horæ, & diei horæ reſiduæ ſunt vndecim cum ſeptem quadrageſimis tertijs partibus vnius horæ.

Pro-

Problema XII.

Minas duas da, triplus vt fiam tui;
Et tu duas da, quadruplus vt fiam tui.

Quæritur quot minas habeant ſinguli.

Solutio. Primi minæ ſint A: ſecundi minæ ſint B; ergo $A + 2$ *ad* $B - 2 = 2$ *ad* 1: ergo $A + 2 = 2B - 4$; ergo $A + 6 = 2B$: ergo $\frac{A+6}{2} = B$: ſed per hypotheſim $B + 2$ *ad* $A - 2 = 4$ *ad* 1: ergo $\frac{A+6}{2} + 2$ *ad* $A - 2 = 4$ *ad* 1: ergo $\frac{A+6}{2} + 2 = A - 2$ *in* 4: ergo $\frac{A}{2} + 5 = 4A - 8$: ergo $\frac{A}{2} - 4A = -8 - 5$: ergo $-\frac{7A}{2} = -13$: ergo $-7A = -26$: ergo $A = \frac{26}{7}$: ergo $A = 3\frac{5}{7}$: ſed $\frac{A+6}{2} = B$: ergo $B = 9\frac{5}{7}$ *per* $2 = 4\frac{6}{7}$; igitur primus habet minas tres, cum quinque ſeptimis; ſecundus habet minas quatuor, cum ſex ſeptimis.

Problema XIII.

Minas decem da, triplus vt fiam tui;
Et tu decem da quintuplus vt fiam tui.

Quæritur quot minas ſinguli habeant.

Solutio. Primi minæ ſint A: ſecundi minæ ſint B: ergo per hypotheſim $A + 10$ *ad* $B - 10 = 3$ *ad* 1: ergo $A + 10 = B - 10$ *in* 3: ergo $A + 10 = 3B - 30$: ergo $A + 40 = 3B$: ergo $\frac{A+40}{3} = B$: ſed per hypotheſim, $B + 10$ *ad* $A - 10 = 5$ *ad* 1: ergo $\frac{A+40}{3} + 10$ *ad* $A - 10 =$

cum:dũmodo bases sint A C & D F, altitudines vero sint C B & F E.

Tertio, si figuræ X & Z sint sectores circulorum, quorum radij sint A C & D F: arcus vero sectorum sint C B & F E.

Quarto, si figuræ X & Z sint sectiones ellipticæ, atque maiorum axium medietates sint A C & D F: minorum vero axium meditates sint C B & F E.

Quinto, si figura X sit quadrãs circuli, cuius radij sint A C & C B; & figura Z sit sectio elliptica eiusq; axiũ medietates sint D F & F E.

Sexto, si figuræ X & Z sint parabolicæ sectiones, & parabolicorum angulorum sinus secundi sint A C & D F, primi vero sinus sint C B & F E.

Septimo, si figuræ X & Z sint hyperbolicæ sectiones, & hyperbolicorum angulorum sinus secundi sint A C & D F: primi vero sinus sint C B & F E.

QVinto, proportio A C *in* C B *ad* figuram X = 6 *ad* 4: supposito quod figura X sit sectio parabolica, atque anguli parabolici sinus primus sit A C, & secundus sinus sit C B. Hanc veritatem (hactenus à nobis non propositam, sed suo loco demonstrandam) ab Archimede legitime probatam esse, testatur communis consensus Mathematicorum; apud quos necdum habetur, sed desideratur notitia proportionis quam habet A C *in* C B *ad* figuram X. Primo, supposito quod figura X sit quadrans circuli cuius radij sint A C & C B. Secundo supposito quod figura X sit sectio elliptica, atque maioris axis medietas sit A C: minoris vero axis medietas sit C B. Tertio, supposito quod figura X sit sectio hyperbolica atque hyperbolici anguli sinus primus sit C B, secundus A C. Theorema quod hic diximus legitime probatum ab Archimede, aliter appellatur parabolæ quadratura: ex alijs tribus theorematibus quæ hactenus desiderantur: primum, aliter dicitur circuli quadratura, secundum, aliter dicitur ellipseos quadratura; tertium, aliter dicitur hyperbolæ quadratura. Aliqui Ageometræ sibi imaginantur impossibilem esse circuli quadraturam, ex eo capite, quod exempli gratia circuli quadrans aliqua ex parte curua linea terminetur, quadratum vero omni ex parte terminetur rectis lineis. Quare si forte alicuius mentem huiusmodi suspicio occupaset, reflectere poterit sectionem parabolicam, etiam aliqua ex parte terminari curua linea: & tamen huius sectionis quadraturam ab Archimede inuentam esse, in confesso est apud Geometras. Deinde propemodum innumeræ sunt figuræ, quarum quadratura à diuersis Geometris inuenta est, licet tales figuræ, vel aliqua, vel omni ex parte terminentur circulorum arcubus; verum de his alias.

IDEÆ

IDEÆ LOGISTICÆ

PARS SEPTIMA.

ARGVMENTVM.

PRoponuntur aliqua problemata Arithmetica exercitij gratia soluta ab auditoribus meis. Ex his prænobilis Dominus Franciscus Zeccadorus Seminarij Romani conuictor, dum hæc scribo, vix tertium in studijs Mathematicis mensem absoluit, ab ipsis primis principijs sumendo exordium. A leo teneram vt ita dicam ætatem non sapit subsequens exercitatio Logistica, tamen non continet nisi specimen eorum quæ prædicto tempore assequutus est in scientijs Mathematicis. Reliqua quæ aut didicit, aut proprio marte composuit, prætermittuntur, quandoquidem pro septima parte Ideæ nostræ Logisticæ tantummodo requiritur aliqua Logistica exercitatio spectans ad Arithmeticam, quemadmodum in quinta parte proposita est altera exercitatio Logistica magis propriè pertinens ad Geometriam.

Prænobilis Domini FRANCISCI ZECCADORI Logistica Exercitatio.

In qua Logisticis discursibus soluuntur varia problemata Arithmetica.

Problema I.



PEtenti, quæ diei hora ſit: reſponſum fuit, ſeptem nonæ partes horarum præteritarum, conſtituunt reſiduas diei horas.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Horæ præteritæ ſint A: ergo per hypotheſim, horæ reſiduæ erunt 7 A *per* 9: ergo per hypotheſim, A & † 7 A *per* 9 = 24: ſed A = 9 A *per* 9: ergo 9 A *per* 9 & † 7 A *per* 9 = 24; ergo 16 A *per* 9 = 24; ergo per prob. 4 cap. 5. lib. 1. Logiſticæ, 16 A = 24 *in* 9: ſed 24 *in* 9 = 216: ergo 16 A = 216; ergo A = $13\frac{1}{2}$; ergo hora quæſita eſt decima tertia cum dimidia.

Problema II.

PEtenti, quæ hora ſit: reſponſum fuit, diei horæ præteritæ ductæ in reſiduas, producunt horas $2\frac{63}{64}$.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Horæ præteritæ ſint B, reſiduæ ſint C, denique B — C ſit A. His poſitis B — C *q* = A 2: ergo, per theor. 1. appendicis lib. 2. Logiſticæ, A 2 & † B *in* 4 C = B † C *q*: ſed quoniam per hypotheſim A *in* C = $2\frac{63}{64}$ = $\frac{191}{64}$, etiam B *in* 4 C = $\frac{191}{16}$; & præterea per hypotheſim, B † C = 24, adeoque B † C *q* = 576: ergo A 2 & † 191 *per* 16 = 576: ergo per Antitheſim, A 2

= 576

$= 576$ & -191 *per* 16: sed $576 = 9216$ *per* 16: ergo A2 $= 9216$ *per* 16 & -191 *per* 16: ergo A2 $= 9025$ *per* 16: ergo A $= 95$ *per* 4: ergo B $-$ C $= 23\frac{1}{4}$: sed etiã B $+$ C $= 24$: ergo per probl. 1. cap. 1. lib. 2. Logisticæ, numerorum B & C minor est $\frac{1}{8}$, maior est $23\frac{7}{8}$: ergo hora quæsita, vel est dimidius quadrans, vel vigesima tertia cum septem dimidijs quadrantibus vnius horæ: nam in titulo problematis determinatum non est, an maior, vel certe minor pars effluxerit: adeoque in solutione id statui non potest.

Problema III.

INterrogatus aliquis, quot lectionibus interfuerit: respondit, lectionum quibus interfui sexta pars ducta in octauam partem, producit earumdem lectionum dimidiam partem.

Quæritur quot lectionibus interfuerit.

Solutio. Numerus lectionum sit A: ergo per hypothesim $\frac{A}{6}$ *in* $\frac{A}{8} = \frac{A}{2}$: sed $\frac{A}{2} = \frac{A}{2}$ *in* 1: ergo $\frac{A}{6}$ *in* $\frac{A}{8} = \frac{A}{2}$ *in* 1: ergo, per theor. 4. cap. 8. lib. 1. Logisticæ, $\frac{A}{6}$ *ad* $\frac{A}{2} =$ 1 *ad* $\frac{A}{8}$: sed per theor. 7. ibidem, $\frac{A}{6}$ *ad* $\frac{A}{2} =$ 2 *ad* 6: ergo 2 *ad* 6 $=$ 1 *ad* $\frac{A}{8}$: ergo per theor. 4. cap. 8. lib. 1. Logisticæ, 2 *in* $\frac{A}{8} = 6$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{8} = 6$: ergo per probl. 4. cap. 5. lib. 1. Logisticæ, 2 A $= 6$ *in* 8: ergo 2 A $= 48$: ergo A $= 24$: ergo lectiones quibus interfuit sunt 24.

Pro-

Problema IV.

INterrogatus aliquis, quot libri paginas legiſſet: reſpondit, paginarum quas legi nona pars ducta in duodecimam partem, producit duas tertias partes earumdem paginarum.

Quæritur quot paginas legerit.

Solutio. Paginarum numerus ſit A: igitur $\frac{A}{9}$ *in* $\frac{A}{12} = \frac{2A}{3}$: ſed $\frac{2A}{3} = \frac{2A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{A}{9}$ *in* $\frac{A}{12} = \frac{2A}{3}$ *in* 1 : ergo $\frac{A}{9}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: ergo $\frac{2A}{18}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: atqui per theor. 10. part.4. Ideæ $\frac{2A}{18}$ *ad* $\frac{2A}{3} = 3$ *ad* 18: ergo 3 *ad* $18 = 1$ *ad* $\frac{A}{12}$: ergo 3 *in* $\frac{A}{12} = 18$ *in* 1: ergo $\frac{3A}{12} = 18$: ergo $3A = 18$ *in* 12: ergo $3A = 216$: ergo $A = 72$: ergo legit ſeptuaginta duas paginas.

Problema V.

INterrogatus aliquis, quot diebus abfuerit ab Vrbe: reſpondit, dierum quibus abfui ab Vrbe duæ nonæ partes ductæ in vnam tertiam partem, producunt ſexdecim tertias partes eorumdem dierum.

Quæritur quot diebus abfuerit ab Vrbe.

Solutio. Dies quibus abfuit ab Vrbe ſint A: ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $\frac{A}{3} = \frac{16A}{3}$: ſed $\frac{16A}{3} = \frac{16A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $\frac{A}{3} = \frac{16A}{3}$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $1 = \frac{16A}{3}$ *ad* $\frac{A}{3}$: atqui $\frac{16A}{3}$ *ad* $\frac{A}{3} = 16$ *ad* 1: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $1 = 16$ *ad* 1 : ergo $\frac{2A}{9}$ *in* $1 = 16$ *in* 1: ergo $\frac{2A}{9} = 16$: ergo $2A = 16$ *in* 9 : ergo $2A = 144$: ergo $A = 72$; ergo dies quibus abfuit ab Vrbe ſút ſeptuaginta duo.

Pro-

Problema VI.

PAstor interrogatus, quot Oues numeret: respondit suarum Ouium duas nonas partes, ad sexdecim tertias partes, habere eamdem proportionem quam tres Oues habent ad omnes Oues quas numerat.

Quæritur quot Oues numeret.

Solutio. Ouium numerus sit A: ergo $\frac{2A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 3$ *ad* A: ergo singulos antecedentes terminos ducendo in 8, etiam $\frac{16A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 24$ *ad* A: sed $\frac{16A}{9}$ *ad* $\frac{16A}{3} = 3$ *ad* 9 $\bumpeq$ 1 *ad* 3: ergo 1 *ad* 3 $=$ 24 *ad* A: ergo 1 *in* A $=$ 3 *in* 24: ergo A $= 72$: ergo Oues quas numerat sunt septuaginta duæ.

Problema VII.

INterrogatus aliquis, quot milliariorum iter confecerit: respondit, quod si ex duabus nonis partibus milliariorum totius itineris, auferantur octo milliaria: reliquus milliariorum numerus, ad tria milliaria, habebit eamdem proportionem, quam octo tertiæ partes totius confecti itineris, habent ad totum iter.

Quæritur quot milliariorum iter confecerit.

Solutio. Confectorum milliariorum numerus sit A: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *ad* $3 = \frac{8A}{3}$ *ad* A $\bumpeq \frac{8A}{3}$ *ad* $\frac{3A}{3} \bumpeq 8$ *ad* 3: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *ad* $3 = 8$ *ad* 3: ergo $\frac{2A}{9} - 8$ *in* $3 = 3$ *in* 8: ergo $\frac{6A}{9} - 24 = 24$: ergo $\frac{6A}{9} = 24 + 24$: ergo $\frac{6A}{9} = 48$. ergo $6A = 48$ *in* 9: ergo $6A = 432$: ergo $A = 72$: ergo itineris confecti milliaria sunt septuaginta duo.

Pro-

duæ noctis horæ sint A : ergo per hypothesim $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $=$ B : ergo $\frac{4A}{35} =$ B : sed quoniam tempore æquinoctij tota nox est 12 horarum, etiam $12 - A = B$: ergo $\frac{4A}{35} = 12 - A$: ergo $4A = 12 - A$ *in* 35 : ergo $4A = 420 - 35A$: ergo $4A + 35A = 420$: ergo $39A = 420$: ergo $A = 10\frac{30}{39}$: ergo $B = 1\frac{9}{39} = 1\frac{3}{13}$: ergo æquinoctium contigit, noctis hora prima cum tribus decimis tertijs partibus vnius horæ.

Solutio secunda. Residuæ noctis horæ sint A : ergo residuarum horarum quatuor septimæ partes erunt $\frac{4A}{7}$: ergo per hypothesim $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $=$ horis præteritis : sed tempore æquinoctij noctis horæ præteritæ simul cum residuis sunt horæ 12 : ergo $\frac{4A}{7}$ *per* 5 & $+ A = 12$: sed $\frac{4A}{7}$ *per* 5 $= \frac{4A}{35}$: ergo $\frac{4A}{35} + A = 12$: ergo $\frac{4A}{35} + \frac{35A}{35} = 12$: ergo $\frac{39A}{35} = 12$: ergo $39A = 12$ *in* 35 : ergo $39A = 420$: ergo $A = 10\frac{30}{39}$: ergo noctis pars residua continet horas $10\frac{30}{39}$: ergo noctis pars præterita continet vnam horam cum nouem trigesimis nonis partibus vnius horæ; siue vnam horam cum tribus decimis tertijs partibus vnius horæ.

Problema X.

Vna cum Mulo vinum portabat Asella :
Atque suo grauiter, seu pondere pressa gemebat;
Talibus & dictis mox increpat ille gementem.
Mater quid luges, teneræ de more puellæ?
Dupla tuis si des mensuram pondera gesto;

At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Quæritur quot menſuræ à ſingulis deferantur.

Solutio. Muli menſuræ ſint A: item Aſellæ menſuræ ſint B: ergo per hypotheſim $A - 1 = B + 1$: ergo $A - 2 = B$: ergo $A - 3 = B - 1$; ſed etiam per hypotheſim $A + 1$ *ad* $B - 1 = 2$ *ad* 1: ergo $A + 1$ *ad* $A - 3 = 2$ *ad* 1: ergo $A - 3$ *in* $2 = A + 1$ *in* 1: ergo $2A - 6 = A + 1$: ergo $2A - A = 6 + 1$: ergo $A = 7$: ergo Muli menſuræ ſunt 7; & quia oſtenſum eſt $A - 2 = B$: etiam $B = 7 - 2 = 5$; ergo Aſellæ menſuræ ſunt 5.

Problema XI.

Surgite laniſicæ, lux eſt, reliquaque diei,
Octarum effluxit portio quinta trium.

Quæritur quæ hora ſit.

Solutio. Diei horæ præteritæ ſint B: horæ reſiduæ ſint A: ergo per hypotheſim $\frac{3A}{8}$ *per* $5 = B$: ergo $\frac{3A}{8}$ *in* $\frac{1}{5} = B$: ergo $\frac{3A}{40} = B$: ſed etiam per hypotheſim $12 - A = B$: ergo $\frac{3A}{40} = 12 - A$: ergo $3A = 12 - A$ *in* 40: ergo $3A = 480 - 40A$: ergo $3A + 40A = 480$: ergo $43A = 480$: ergo $A = 11\frac{7}{43}$: ergo $12 - A = 12 - 11\frac{7}{43} = \frac{36}{43}$: Sed $12 - A = B$: ergo $B = \frac{36}{43}$; igitur elapſæ ſunt triginta ſex quadrageſimæ tertiæ partes vnius horæ, & diei horæ reſiduæ ſunt vndecim cum ſeptem quadrageſimis tertijs partibus vnius horæ.

Pro-

Problema XII.

Minas duas da, triplus vt fiam tui;
Et tu duas da, quadruplus vt fiam tui.

Quæritur quot minas habeant ſinguli.

Solutio. Primi minæ ſint A: ſecundi minæ ſint B; ergo $A + 2$ *ad* $B - 2 = 2$ *ad* 1: ergo $A + 2 = 2B - 4$; ergo $A + 6 = 2B$: ergo $\frac{A+6}{2} = B$: ſed per hypotheſim $B + 2$ *ad* $A - 2 = 4$ *ad* 1: ergo $\frac{A+6}{2} + 2$ *ad* $A - 2 = 4$ *ad* 1: ergo $\frac{A+6}{2} + 2 = A - 2$ *in* 4: ergo $\frac{A}{2} + 5 = 4A - 8$: ergo $\frac{A}{2} - 4A = -8 - 5$: ergo $-\frac{7A}{2} = -13$: ergo $-7A = -26$: ergo $A = \frac{26}{7}$: ergo $A = 3\frac{5}{7}$: ſed $\frac{A+6}{2} = B$: ergo $B = 9\frac{5}{7}$ *per* $2 = 4\frac{6}{7}$; igitur primus habet minas tres, cum quinque ſeptimis; ſecundus habet minas quatuor, cum ſex ſeptimis.

Problema XIII.

Minas decem da, triplus vt fiam tui;
Et tu decem da quintuplus vt fiam tui.

Quæritur quot minas ſinguli habeant.

Solutio. Primi minæ ſint A: ſecundi minæ ſint B: ergo per hypotheſim $A + 10$ *ad* $B - 10 = 3$ *ad* 1: ergo $A + 10 = B - 10$ *in* 3: ergo $A + 10 = 3B - 30$: ergo $A + 40 = 3B$: ergo $\frac{A+40}{3} = B$: ſed per hypotheſim, $B + 10$ *ad* $A - 10 = 5$ *ad* 1: ergo $\frac{A+40}{3} + 10$ *ad* $A - 10 =$

5 *ad* 1 ergo $\frac{A+70}{3}$ *ad* A − 10 = 5 *ad* 1: ergo $\frac{A+70}{3} = 5$ A − 50: ergo $\frac{A}{3} - 5$ A = − 50 − $\frac{70}{3}$; ergo $\frac{-14A}{3} = \frac{-220}{3}$; ergo 14 A = 220: ergo A = 15 $\frac{5}{7}$: sed A + 40 *per* 3 = B: ergo B = 15$\frac{5}{7}$ + 40 *per* 3 = 18$\frac{4}{7}$; igitur primus habet minas quindecim, cum quinque septimis; secundus habet minas octodecim, cum quatuor septimis.

Problema XIV.

PRoch superum pater ità placent, quæ Tessalà cantu
Molitur maga? cum Phœbe pudibunda lateret,
Vidi ego; bis tantum solis restabat ab ortu,
Tertia transactæ quantum & pars septima noctis.

Quæritur quo tempore contigerit eclipsis Lunæ.

Solutio. Noctis pars præterita sit A; residua pars noctis sit B; ergo per hypothesim $\frac{A}{3} + \frac{A}{7} = \frac{B}{2}$; ergo $\frac{7A}{21} + \frac{3A}{21} = \frac{B}{2}$; ergo $\frac{10A}{21} = \frac{B}{2}$; ergo $\frac{20A}{21}$ = B: sed A + B = 12 (agitur enim de noctibus antiquo Romanorum more sumptis, quæ singulæ habebant duodecim horas) ergo A + $\frac{20A}{21}$ = 12: ergo $\frac{21A}{21} + \frac{20A}{21}$ = 12; ergo $\frac{41A}{21}$ = 12; ergo 41 A = 21 *in* 12, ergo 41 A = 252; ergo A = 6$\frac{6}{41}$: ergo eclipsis Lunæ contigit, quando effluxerant horæ 6 cum sex quadragesimis primis partibus vnius horæ.

Pro-

Problema XV.

VAs ex parte plenum vino generoſo, continet 17 menſuras; quæ ſingulæ valent 14 nummos; deinde aquam vino affundendo totum vas impletum fuit, ſic vt ex vino aqua mixto menſura valeret 9 nummos.

Quæritur quanta ſit totius vaſis capacitas.

Solutio. Menſuræ implentes vas ſint A: quandoquidem 14 *in* 17 = 238, igitur totius vini valor eſt 238; ergo $\frac{238}{9}$ = A: ergo $26\frac{4}{9}$ = A: ergo totum vas capit meuſuras $26\frac{4}{9}$.

Problema XVI.

ALiquis vna parte ~~noctis ſtuduit, altera~~ parte dormiuit; quot horis durauerit tota nox ignorat; ſcit tamen horas quibus ſtuduit ductas in horas quibus dormiuit, producere horas $19\frac{1}{4}$: & ſe duas horas amplius ſtudio, quam ſomno impendiſſe.

Quæritur primo, quot horis durauerit tota nox.

Quæritur ſecundo, quot horis ſtuduerit.

Solutio primi quæſiti. Horæ ſtudio datæ ſint B: horæ ſomno datæ ſint C: totius noctis horæ ſint A. Igitur B + C = A: ergo B + C *q* = A 2: atqui per theor. 1. appendicis lib. 2. Logiſticę B + C *q* = B — C *q* & + B *in* 4 C: ergo A 2 = B — C *q* & + B *in* 4 C: ſed per hypotheſim B — C = 2, adeoque B — C *q* = 4: & inſuper

ſuper B *in* $4\,C = 19\frac{1}{4}$ *in* $4 \bumpeq 77$: ergo $A^{2} = 4 + 77 \bumpeq 81$: ergo $A = 9$: ergo tota nox fuit 9 horarum.

Solutio ſecundi quæſiti. Ex primi quæſiti ſolutione conſtat, totius noctis horas eſſe 9, adeoque $C + B = 9$: ſed per hypotheſim etiam $B - 2 = C$: ergo $B + B - 2 = 9$: ergo $2\,B = 9 + 2$: ergo $2\,B = 11$: ergo $B = 5\frac{1}{2}$: ergo horæ ſtudio datæ ſunt quinque cum dimidia.

Problema XVII.

Titius & Caius ſimul in nundinis lucrati fuerant aureos 25: prior, in reditu ſui lucri ſeptimam, alter ſui lucri quintam partem impenderat: quæ expenſæ ſimul erant aureorum $4\frac{1}{7}$.

Quæritur vtriuſque lucrum.

Solutio. Lucrum Titij ſit A: ergo Cai lucrum erit $25 - A$: ergo ſeptima pars lucri Titij erit $\frac{A}{7}$, item quinta pars lucri Cai erit $\frac{25-A}{5}$; ergo $\frac{A}{7} + \frac{25-A}{5} = 4\frac{1}{7}$: ergo $\frac{A}{7} - \frac{A}{5} = \frac{31}{7} - \frac{25}{5} \bumpeq \frac{-4}{7}$; ergo $\frac{5A}{35} - \frac{7A}{35} = -\frac{4}{7}$; ergo $-\frac{2A}{35} = \frac{-4}{7}$; ergo $-\frac{2A}{35} = -\frac{20}{35}$; ergo $2\,A = 20$: ergo $A = 10$; ergo Titij lucrum fuit 10 aureorum, & Cai lucrum fuit 15 aureorum.

Problema XVIII.

Mercator emendis mercibus impenderat aureos 74: ex earumdem mercium venditione ſperauerat

uerat aureos 146; verum ſua ſpe fruſtratus, aſſerit, ſummam quam vltra impenſam pecuniam accepit, tantum eſſe ſeptimam partem ſummæ quam vltra acceptam pecuniam ſperauerat.

Quæritur quot aureos acceperit ex mercibus venditis.

Solutio. Ex venditis mercibus accepta aureorum ſumma ſit X, & præterea $X - 74 = A$: ergo ex hypotheſi ſatis patet $74 + A = X$, ac præterea $146 - 7A = X$: ergo $74 + A = 146 - 7A$: ergo $8A = 146 - 74$: ergo $8A = 72$; ergo $A = 72$ *per* 8: ergo $A = 9$: ſed $74 + A = X$; ergo etiam $74 + 9 = X$; ergo $83 = X$; ergo ex venditis mercibus accepit aureos octoginta tres.

Problema XIX.

Titius & Caius ſinguli contraxerunt æquale debitum aliquot aureorum, quod vt extinguerent, Caius triplo amplius ſoluit quam Titius. Præterea Caio remanent ſoluendi aurei $10\frac{1}{4}$; Titio remanent ſoluendi aurei $33\frac{1}{4}$.

Quæritur debitum ſingulorum.

Solutio. Aurei ſoluti à Titio ſint A; ergo aurei ſoluti à Caio, erunt 3 A: ergo totum debitum Titij erit $A + 33\frac{1}{4}$, & totum debitum Cai erit $3A + 10\frac{1}{4}$: atqui hæc duo debita ſunt inter ſe æqualia: ergo $3A + 10\frac{1}{4} = A + 33\frac{1}{4}$: ergo $3A - A = 33\frac{1}{4} - 10\frac{1}{4}$: ergo

ergo 2 A = 23 $\frac{2}{4}$: ergo A = 11 $\frac{3}{4}$: ergo A † 33 $\frac{3}{4}$ = 11 $\frac{3}{4}$ † 33 $\frac{3}{4}$ ≏ 45 $\frac{1}{2}$: ſed A † 33 $\frac{3}{4}$ = aureis quos debet Titius ; ergo aurei quos debet Titius ſunt 45 $\frac{1}{2}$; igitur ſingulorum debitum eſt 45 $\frac{1}{2}$ aureorum.

Problema XX.

IN Pyramide cuius baſis quadrata eſt, altitudo pyramidis eſt ſextupla latitudinis baſeos ; atque tota pyramis continet pedes cubicos 843 $\frac{3}{4}$.

Quæritur altitudo pyramidis.

Solutio. Pedes longitudinis baſeos ſint A; ergo, cum baſis quadrata ſit, eius latitudo erit A; ſed latitudo *ad* altitudinem = 1 *ad* 6 ; ergo pyramidis altitudo erit 6 A; ergo tertia pars altitudinis erit 2 A ; ergo A *in* A *in* 2 A = 843 $\frac{3}{4}$; ergo 2 A 3 = 843 $\frac{3}{4}$ ≏ $\frac{3375}{4}$; ergo ſingula diuidendo per 2, etiam A 3 = $\frac{3375}{8}$; ergo A = $\frac{15}{2}$ ≏ 7 $\frac{1}{2}$; ergo 6 A = 45 ; ergo altitudo pyramidis continet pedes 45.

Problema XXI.

IN pyramide cuius baſis eſt parallelogrammum, baſeos latitudo eſt ſeſquialterea longitudinis; præterea tota pyramidis altitudo eſt duodecupla longitudinis ; denique tota pyramis continet duas nonas partes vnius pedis cubici.

Quæ-

Quæritur baſeos longitudo & latitudo, atque altitudo pyramidis.

Solutio. Pedes contenti in longitudine baſeos pyramidis, ſint 2 A; ergo latitudo erit 3 A, item altitudo erit 24 A, adeoque tertia pars altitudinis erit 8 A; igitur $2\,A$ *in* $3\,A$ *in* $8\,A = \frac{2}{9}$; ergo $48\,A^3 = \frac{2}{9}$; ergo $48\,A^3$ *in* $9 = 2$; ergo $432\,A^3 = 2$; ergo $A^3 = \frac{2}{432} \bumpeq \frac{8}{1728}$; ergo $A = \frac{2}{12} \bumpeq \frac{1}{6}$; ergo $2\,A = \frac{2}{6} \bumpeq \frac{1}{3}$; ergo $3\,A = \frac{3}{6} \bumpeq \frac{1}{2}$; ac denique $24\,A = \frac{24}{6} \bumpeq 4$; ergo longitudo baſeos continet vnam tertiam partem pedis, & latitudo continet dimidium pedem; denique altitudo pyramidis eſt 4 pedum.

Problema XXII.

Caius & Titius ſimul lucrati ſunt vnum aureum, cum quinque vigeſimis octauis partibus vnius aurei; præterea lucrum Cai ad lucrum Titij habet eamdem proportionem, quam quatuor habet ad ſeptem.

Quæritur quantum ſit lucrum ſingulorum.

Solutio. Lucrum Cai ſit A; lucrum Titij ſit B; ergo per hypotheſim $A + B = 1\frac{5}{28} \bumpeq \frac{33}{28}$; ergo $B = \frac{33}{28} - A$; ſed per hypotheſim A *ad* B = 4 *ad* 7; ergo A *ad* $\frac{33}{28} - A$ = 4 *ad* 7; ergo A *in* $7 = \frac{33}{28} - A$ *in* 4; ergo $7\,A = \frac{132}{28} - 4\,A$; ergo $11\,A = \frac{132}{28}$; ergo $A = \frac{132}{308} \bumpeq \frac{3}{7}$; ergo $A = \frac{3}{7}$; atqui 4 *ad* 7 = $\frac{3}{7}$ *ad* $\frac{3}{4}$; ergo $B = \frac{3}{4}$; igitur Caius lucratus eſt tres ſeptimas partes vnius aurei, & Titius lucratus eſt tres quartas partes vnius aurei.

Problema XXIII.

IN epistola aliqua hæc habentur; *Ex tribus numeris A, B, C, à me notatis, duo A & B deleti sunt, reliquus C à me legi potest, indicari non potest; memini tamen quod numerus A ad numerum B habeat proportionem quam habet quatuor ad septem, quodque numerus A additus numero B producat tertiam partem numeri C. Peto, an vel quomodo per Arithmeticam vulgarem tantum mihi cognitam inuenire possim numeros A & B?*

Quæritur quid rescribi possit.

Solutio. Per hypothesim $A + B = \frac{C}{3}$; ergo $3A + 3B = C$; ergo $3B = C - 3A$; sed per hypothesim $3A$ *ad* $3B = 4$ *ad* 7; ergo $3A$ *ad* $C - 3A = 4$ *ad* 7; ergo $3A$ *in* $7 = C - 3A$ *in* 4; ergo $21A = 4C - 12A$; ergo $21A + 12A = 4C$; ergo $33A = 4C$; ergo $A = \frac{4C}{33}$; præterea quia 4 *ad* $7 = \frac{4C}{33}$ *ad* $\frac{7C}{33}$; etiam $B = \frac{7C}{33}$; Igitur rescribi potest, quod cognitum sibi numerum C, prius ducendo in 4, atque hoc productum diuidendo per 33, inueniet numerum A. Præterea quod ducendo numerum C, in numerum 7, atque hoc productum diuidendo per 33 inueniet numerum B.

Nota, supposito quod numerus C sit $3\frac{15}{28}$, tunc numerus A erit $\frac{1}{7}$, & numerus B erit $\frac{1}{4}$.

Pro-

Problema XXIV.

Scitur Caium dixisse Titio; quod haberet annos 110. si ipsi adderetur quarta pars ætatis Titij; atque Titium respondisse, sibi deesse tertiam partem ætatis Cai vt habeat 110 annos.

Quæritur Cai & Titij ætas.

Solutio. Anni ætatis Cai sint 3 A; Titij vero anni sint 4 B; ergo $3 A + B = 110$; ergo $B = 110 - 3 A$: ergo $4 B = 440 - 12 A$; sed per hypothesim $4 B + A = 110$; ergo $440 - 12 A + A = 110$; ergo $-12 A + A = 110 - 440$; ergo $-11 A = -330$; ergo $3 A = 90$; ergo Cai anni sunt 90. Prætereapatet $A = 30$: sed per hypothesim $4 B + A = 110$; ergo $4 B + 30 = 110$; ergo $4 B = 110 - 30$; ergo $4 B = 80$; adeoque Titij anni sunt 80. Igitur Caius est 90 annorum; & Titius est 80 annorum.

Problema XXV.

De aureis quos habent Caius, Titius, & Meuius; hæc scripta inueniuntur. Caius habet 100 aureos accipiendo dimidiam partem aureorum Titij. Præterea Titius habet 100 aureos accipiendo tertiam partem aureorum Meuij. Denique Meuius habet 100 aureos accipiendo quartam partem aureorum Cai.

Quæritur quot aureos habeant singuli.

Aurei Cai sint $4A$. Aurei Titij sint $2B$. Aurei Meuij sint $3C$. His positis per hypothesim $4A + B = 100$; ergo $B = 100 - 4A$, ergo $2B = 200 - 8A$, sed etiam per hypothesim $2B + C = 100$, ergo $200 - 8A + C = 100$, ergo $C = 100 - 200 + 8A$, ergo $3C = 300 - 600 + 24A$, sed per hypothesim $3C + A = 100$, ergo $300 - 600 + 24A + A = 100$, ergo $24A + A = 100 - 300 + 600$, ergo $25A = 400$, ergo $4A = 64$, ergo aurei Cai sunt 64. Præterea quia per hypothesim $4A + B = 100$, etiam $64 + B = 100$, adeoque $B = 100 - 64$, ergo $B = 36$, ergo $2B = 72$, ergo aurei Titij sunt 72. Rursus quia $4A = 64$, adeoque $A = 16$, & per hypothesim $3C + A = 100$, etiam $3C + 16 = 100$, ergo $3C = 100 - 16$, ergo $3C = 84$, adeoque aurei Meuij sunt 84. Igitur Caius habet aureos 64. Titius habet aureos 72. Meuius habet aureos 84.

Problema XXVI.

De liquore tribus diuersis vasis contento, scitur, quod in primo vase desint 29 mensuræ, vt contineat duplo plures mensuras quam reliquis duobus vasis contineantur. Præterea quod in secundo vase desint 29 mensuræ, vt contineat triplo plures mensuras quam reliquis duobus vasis contineantur. Denique quod in tertio vase desint 31 mensuræ, vt contineat quadruplo plu-

plures mensuras quã contineantur duobus reliquis vasis.

Quæritur quot mensuræ singulis vasis contineantur.

Solutio. Primo vase contentæ mensuræ sint A, secundo vase contentæ mensuræ sint B; tertio vase contentæ mensuræ sint C. Hoc posito Per hypothesim $A + 29 = 2B + 2C$, ergo $\frac{A+29}{2} = B + C$, ergo $A + B + C = A + \frac{A+29}{2}$, ergo $A + B + C = \frac{3A}{2} + \frac{29}{2}$, ergo $A + C = \frac{3A}{2} + \frac{29}{2} - B$, sed etiam per hypothesim $B + 29 = 3A + 3C$, ergo $B + 29 = \frac{3A}{2} + \frac{29}{2}$ & $- B$ *in* $3 \bumpeq \frac{9A}{2} + \frac{87}{2} - 3B$, ergo $3B = \frac{9A}{2} + \frac{87}{2}$, sed per hypothesim $C + 31 = 4A + 4B$, ergo $C + 31 = 4A + \frac{9A}{2} + \frac{29}{2}$, ergo $C = 4A + \frac{9A}{2} + \frac{29}{2} - 31$, ergo $C = \frac{17A}{2} - \frac{33}{2}$. Quandoquidem igitur ostensum sit $A + B + C = \frac{3A}{2} + \frac{29}{2}$, & præterea $B = \frac{9A}{8} + \frac{29}{8}$, ac denique $C = \frac{17A}{2} - \frac{33}{2}$, manifestum est $\frac{3A}{2} + \frac{29}{2} = A + \frac{9A}{8} + \frac{29}{8} + \frac{17A}{2} - \frac{33}{2}$, ergo per antithesim $\frac{3A}{2} - A - \frac{9A}{8} - \frac{17A}{2} = \frac{29}{8} - \frac{33}{2} - \frac{29}{2}$, ergo $- \frac{16A}{2} - \frac{9A}{8} = \frac{29}{8} - \frac{62}{2}$, ergo $- \frac{64A}{8} - \frac{9A}{8} = \frac{29}{8} - \frac{248}{8}$, ergo $73A = 219$, ergo $A = 3$. Deinde quia $B = \frac{9A}{8} + \frac{29}{8} \bumpeq \frac{27}{8} + \frac{29}{8} \bumpeq \frac{56}{8} \bumpeq 7$, etiam $B = 7$, denique quia $C = \frac{17A}{2} - \frac{33}{2} \bumpeq \frac{51}{2} - \frac{33}{2} \bumpeq \frac{18}{2} \bumpeq 9$, etiam $C = 9$. Igitur primum vas continet tres mensuras. Secundum vas continet septem mensuras: Tertium vas continet nouem mensuras.

Problema XXVII.

Caius & Titius societatem inierunt ea lege, vt lucrum responderet à singulis collatæ pecuniæ.

Caius

Caius contulit 60 aureos, qui 9 menſibus in ſocietate permanſerunt, quod huic pecuniæ lucrum reſpondeat neſcitur, & ſimiliter ignoratur à Titio collatæ pecuniæ ſumma, quæ permanſit in ſocietate ſex menſibus; quibus elapſis, Titius pro lucro & poſita à ſe pecunia recepit 60 aureos. Denique conſtat vtriuſque lucrum ſimul eſſe 65 aureorum.

Quæritur ſumma pecuniæ à Titio collatæ, atque ſingulorum lucrum.

Solutio. Aurei collati à Titio ſint A, ergo lucrum Titij erit 60 — A, ſed A *ad* 60 — A = 60 *ad* 3600 A *o* 1 — 60, ergo Caius ſex menſibus lucratus eſt 3600 A *o* 1 — 60, atqui 6 *ad* 9 = 3600 A *o* 1 — 60 *ad* 32400 A *o* 1 — *per* 6 = 5400 A *o* 1 — 90, ergo Caius nouem menſibus lucratus eſt 1400 A *o* 1 — 90, atqui lucrum Titij eſt 60 — A, ergo per hypotheſim 65 = 5400 A *o* 1 — 90 † 60 — A, ergo 65 † 90 — 60 = 5400 A *o* 1, — A, ergo 95 = 5400 A *o* 1 — A, ergo 95 † A = 5400 A *o* 1, ergo 95 A † A 2 = 5400, ergo A = 40, adeoque Titius contulit aureos 40, & lucratus eſt aureos 20, denique Caius lucratus eſt aureos 45.

Pro reſolutione compoſitæ æquationis, in qua diximus 95 A † A 2 = 5400, adhibendo praxim propoſitam in epiſtola ad amicum addita prioribus Logiſticæ libris. Primo inuenio 95 *q* = 9025, item 5400 *in* 4 = 21600, adeoque 95 *q* & † 5400 *in* 4 = 9025 † 21600 = 30625, præterea R 1 * 30625 = 175, denique 175 — 95 = 80, adeoque A = 80 *per* 2 = 40, vt infertur in ſolutione.

INDEX.

Dditio Arithmetica & Geometrica quid. pag.49. lin.28.
Additio, qua ſcriptione Logiſtica indicetur. pag.51.lin.40.
Æquatio continua, & diſcreta, quid. pag.58. lin.20.
Æquationes, quomodo repræſententur Logiſtica ſcriptione. pag.58. lin.29.
Æquatio aliqua, ſed non omnis æquatio, eſt proportio pag.57. lin.22.
Altitudo, item recta & circularis altitudo, quid. pag.31. lin.6.
Altitudo in quam aſſurgit circumferentia baſeos ductu tertio, quæ. pag.33. lin.17.
Anguli axis, quid. pag.40. lin.33.
Anguli complementum. quid. pag.40. lin.17.
Anguli diſsimiles aut ſimiles, qui. pag.176. lin.2.
Anguli mixtilinei axis, quid. pag.173. lin.32.
Anguli mixtilinei, quando dicantur æquales, vel ſimiles. pag.175. lin.39. & pag.176. lin.5.
Anguli mixtilinei, radius, ſinus primus, item ſinus ſecundus, quid. pag.173 lin.8.
Anguli plani axis, quid. pag.40. lin.37.
Anguli quomodo dicantur inter ſe æquales, maiores, vel minores. pag.40. lin.13.
Angulus, ſiue vox angulus, quid ſignificet. pag.38. lin.30.
Angulus rectilineus, quid. pag.39. lin.8.
Angulus rectilineus, acutus, obtuſus, & rectus, quid. pag.40. lin.9.
Anguli rectilinei, ſinus, radius, ſubtenſa, menſura, vertex, quid. pag 39. in fine. & pag.40.
Angulus rectilineus æquiualens angulo plano, quid. pag.41. lin.1.
Angulus planus, quid. pag.40. lin.36.
Angulus, circularis, ellipticus, parabolicus, & hyperbolicus, quid. pag.172. in fine, & pag.173.
Anguli rectilinei, circularis, elliptici, parabolici, & hyperbolici, proprietates. pag.174.
Arithmeticæ obiectum, quod. pag.4. lin.20.
Axioma rigoroſum, & non rigoroſum ſiue hypotheticum, quid. pag.16. lin.35. & pag.17. lin.14.
Axiomata, cur in Logiſtica noſtra non proponantur, neque omnia, neque eo ordine, vt ab alijs proponuntur. pag.72. lin.1.
Axiomata rigoroſa noſtræ Logiſticæ. pag 66.lin.25.& pag 98.lin.32.

 Axio-

Axiomata non rigorosa, siue hypothetica, assumpta in nostra Logistica pag 71. lin. 11.
Axis, ellipseos, parabolæ, hyperbolæ; quid. pag. 174. in fine.

BAsis, quid. pag. 31. lin. 6.

CIrculus, est plana superficies vnius lineæ circuitu terminata, à qua ad aliquod punctum intra contentum omnes quæ duci possunt rectæ lineæ sunt æquales. Vnica illa linea circulum terminans, dicitur circumferentia, vel perimeter circuli. Punctum intra circulum contentum, siue in ipso circulo positum, & à singulis circumferentiæ punctis æqualiter distans, dicitur centrum circuli. Punctum extra circulum positum, & à singulis circumferentiæ punctis æqualiter distans, appellatur polus circuli, aliter definiri potest circulus dicendo quod circulus sit figura ductu quarto genita ex recta linea, circumducta donec redeat ad eundem locum.
Compositio abstracta, quid pag. 12. lin. 3.
Concreta magnitudinis, quando dicantur similia. pag. 13. lin. 3.
Concreta quantitatis vniuersalis, continuæ, aut discretæ, quid. pag. 5. lin. 5.
Concreti, subiectum aut prædicatum, quid. pag. 3. lin. 35.
Concreti proprietas, quid. pag. 11. lin. 29.
Concretorum magnitudinis quatuor proprietates, quæ potissimum considerantur in Mathesi pag. 11. lin. 36.
Concretum quid. pag. 3. lin. 36.
Conus rectus, est corpus genitum ductu tertio, ex basi quæ fit circulus, quando circuli centrum per axem circuli assurgit in altitudinem. Item coni axis, coni triangulum per axem, quid. pag. 179. lin. 26.
Conus, quando dicatur rectus vel obliquus. pag 33. lin. 16. vel pag. 179. lin. 28.
Conus, quot modis diuersis secetur plano. pag 180. lin. 9.
Corpus, quid. pag. 23. lin. 12.
Cylinder rectus, est corpus genitum ductu primo ex basi quæ fit circulus. Item cylinder circularis, ellipticus, parabolicus, hyperbolicus, quid. pag. 178. lin. 8.
Cylinder, quando dicatur rectus vel obliquus. pag. 178. lin. 21.

De-

INDEX.

Demonstratio, quid. Item demonstrationes positiuæ & negatiuæ: regorosæ & non regorosæ, quid sint: aut quomodo differant inter se. pag. 17. lin. 17.
Diameter circuli, est linea recta per circuli centrum transiens, atque vtrinque terminata ad circumferentiam circuli.
Diameter transuersa hyperbolæ, quid. pag 177. lin. 40.
Dispositio abstracta, quid. pag. 12. lin. 11.
Ductus Arithmeticus, & Geometricus, quid: & quomodo hi ductus ab inuicem differant. pag. 28. lin. 36. vel pag. 34. lin. 24. vel pag. 50. lin. 17. vel Arithmeticæ introductionis. pag. 16. cap. 4.
Ductus Arithmeticus & Geometricus; item diuisio, siue reductus Arithmeticus & Geometricus, quomodo repræsententur Logistica scriptione. pag. 28. lin. 38. vel pag. 52. lin. 17.
Ductus nominati & innominati, quid. pag. 28 lin. 33.
Ductus nominati eiusdem vel diuersæ classis, quid. pag. 37. lin. 10.
Ductus nominati diuiduntur in quatuor classes: quid sint, aut quos ductus contineant singulæ classes. pag. 37. lin. 12
Ductus primus, item secundus, tertius, quartus, quintus, quid sit aut quomodo producat. pag. 31. & 32.
Ductus realis, pro vt distinguitur à ductu æquiualente, dicitur ductus in quo adhibentur datæ quantitates.
Ductus æquiualens dicitur in quo pro datis quantitatibus aliæ adhibentur, quæ datis quantitatibus æquiualent. pag. 38. lin. 5.

Ellipsis integra, quid. pag. 176. lin. 41.
Elliptica linea; quid. pag. 174. lin. 39.
Ens logicum, aut physicum, quid. pag. 3. lin. 43.
Extensio abstracta, quid. pag. 17. lin. 7.
Extensiones tres diuersæ dantur, in longum, latum, & altum: quid singulæ sint. pag. 24. lin. 22.

Genitor, item genitor inferior aut superior, operationis Logisticæ, quid. pag. 55. lin. 6.
Genitum operationis Logisticæ, quid sit: quando simplex dicatur; item primæ, secundæ, tertiæ, aut quartæ classis. pag. 37. lin. 24.
Geometriæ obiectum, quod, pag. 4. lin. 20.

Latitudo quomodo intelligenda sit. pag.23. lin.18.
Liber primus nostræ Logisticæ, quid contineat. pag.21. lin.1.
Linea quid sit. pag 23. lin.9.
Linea eadem diuersimode considerata non est necessario sibi ipsi similis. pag.176. lin.23.
Linea hyperbolica, quid. pag.175. lin.1.
Linea parabolica, quid. pag.174. lin.41.
Lineæ parallelæ dicuntur, quæ secundum singulas partes æqualiter distant ab inuicem.
Lineæ, quæ sint in eodem plano. pag.178. lin.36.
Lineæ similes, quæ sint. pag.176. lin.10.
Logisticæ nostræ finis primarius. pag.6. lin.20.
Logisticæ nostræ fines secundarij. pag.8. lin.30.
Logisticæ nostræ via, siue methodus ipsi propria. pag.7. lin.41.
Longitudo quomodo intelligenda sit. pag.23.lin.18.

Magnitudo quid. pag.5. lin 2.
Mathesis stricta quid. pag.4. lin.9.
Mathesis stricta vniuersalis, quid sit: & quomodo differat, tum à Geometria, tum ab Arithmetica. pag.4. 16.
Matheseos obiectum, quid. pag.9. lin.29.
Matheseos strictæ, & practicæ munus. pag.9. lin.37.
Multiplicatio quomodo repræsentetur scriptione Logistica. pag.52. lin.10.vide ductus.

Operatio Logistica, quid. pag.51. lin.33.
Operationes Logisticæ, quot diuersæ inueniantur. Ibidem, vel pag.53. lin.30.
Operationum Logisticarum genitores & genita. pag.54. lin.30.
Operationes Logisticæ, per genitores nunquam indicant productum subtractionis. pag.54. cap.9.
Operationes æquiualentes dicuntur in quibus pro datis quantitatibus al æ ipsis æquiualentes adhibentur.

Parabola integra, quid. pag.177. lin.2.
Parallelogrammum, quid. pag.193. lin.13.

Parallelogrammum cylindricum, quid. pag.179. lin.3.
Parallelogrammum cylindricum terminatum lineis breuissimis, & non terminatum lineis breuissimis, quid. pag. 193. lin.39.
Parallelogrammum vniuersaliter sumptum, quid. pag. 193. lin. 18.
Parallelepipedum, est corpus genitum ductu primo vel secundo ex basi plana & rectilinea in qua singula opposita latera sunt parallela, hoc est ex basi plana quæ sit parallelogrammum.
Physico-Mathematicæ munus. pag.70. lin.25.
Postulatum, quid. pag.17. lin.1.
Postulata duo proponuntur. pag.70. lin. 25.
Principium, quid. pag.17. lin.9.
Prisma, est corpus ductu primo vel secundo genitum ex basi, quæ sit figura plana ac rectilinea in qua singula opposita latera non sunt inter se parallela; nam basis plana ac rectilinea habens singula latera opposita parallela, ductu primo vel secundo generat parallelepipedum.
Principium rigorosum & hypotheticum, quid. pag.17. lin.12.
Problema, quid. pag.17. lin.7.
Problemata aliqua de rationibus. pag.114. lin.21.
Problemata continentia modum inueniendi proportionem inter producta ex diuersis ductibus nominatis. pag.123. lin.16.
Problemata Arithmetica soluta discursibus Logisticis. pag. 212.
Proportio, quid. pag.42. lin 6.
Proportio continua & discreta, quid. pag.58. lin.15.
Proportio indifferens, quid. pag.61. lin.13.
Proportio æqualitatis, inter reliquas proportiones se habet vt vnitas inter reliquos numeros. Item proportio maioris inæqualitatis, inter reliquas proportiones se habet, vt numerus vnitate maior inter reliquos numeros. Item proportio minoris inæqualitatis, inter reliquas proportiones se habet vt numerus vnitate minor inter reliquos numeros. pag.94. lin.10.
Proportio composita, quid. pag.45. lin.17. vel pag.91. lin.8.
Proportio duplicata, triplicata, &c. quid. pag.45. lin.33. pag.93. lin.2.
Proportiones, quæ dicantur æquales inter se. pag.95. lin.20.
Proportionem æqualitatis non esse proportionem, falsum ostenditur. pag 92. lin.
Proportionum compositio, non est additio, sed est multiplicatio proportionum. pag.91. lin.38.
Proportiones possunt realiter vel æquiualenter, addi, subtrahi, multipli-

tiplicari, diuidi, & quomodo id fiat. pag.43. lin.5. & pag. 114. atque sequentibus.
Proportionum æquatio, non vitiatur per Antithesim. pag.43.lin.27.
Proportionum, additio, subtractio, multiplicatio, & diuisio docetur in appendice partis quartæ. pag. 113.
Proportionalitas, quid. pag.44. lin. 8.
Proportionalitas, qua scriptione Logistica indicetur. pag.44. lin. 11.
Proportionalitas æqualitatis, item maioris, aut minoris inæqualitatis, quid. pag.44. lin.22.
Propositionem euehere ad maiorem vniuersalitatem, quid. pag.10. lin. 18.
Propositio potest esse certa licet non sit rigorosè demonstrata. pag. 18. lin.9.
Pyramis est corpus genitum ductu tertio ex basi quæ sit figura plana rectilinea.
Pyramis quando dicatur recta, vel obliqua pag.33. lin. 13.

QVantitatis genera diuersa, quot. pag.22. lin.42.
Quantitas continua, quid. pag.23. lin.3.
Quantitas discreta, quid. pag.23. lin.2.
Quantitas Mathematica, quid. pag.22. lin. 31.
Quantitas vniuersalis, quid. pag.4. lin.24.
Quantitas propriè dicta, & impropriè dicta, quid. pag.47. lin. 21.
Quantitates æquiualentes dicuntur, quæ habeat eumdem valorem. pag. 25. cap. 2.
Quantitates vniformes & difformes, quid. pag.54. lin.34.
Quantitas positiua & negatiua, quid. pag.54. lin.12.
Quantitas non potest dici magna vel parua nisi facta comparatione ad aliam quantitatem. pag.41. lin.12.
Quantitatum diuersi generis vna non potest dici maior aut minor altera, vel illi æqualis. pag.26. lin. 1.
Quantitas continua intelligitur produci ex motu locali, quo vehitur, aut rotatur, illud ex quo producitur quantitas continua: atque hi motus in quantitate continua, æquiualent multiplicationi in quantitate discreta. pag.29. lin.13.
Quantitatem quantitati addere, vel quantitatem ex quantitate subtrahere, quid. pag.48. lin 17.
Quantitatem discretam ducere in quantitatem, vel reducere, aut diuidere per quantitatem discretam, quid. pag.50. lin.23.
Quan-

Quantitatem continuam ducere in quantitatem continuam, vel diuidere aut reducere per quantitatem continuam, quid. pag. 29. & 30.
Quantitates quælibet non possunt simul addi, vel vna ex altera subtrahi, reali additione, vel subtractione Mathematica. pag. 27. lin. 40.
Quantitas continua non potest realiter, sed potest æquiualenter duci in aliam ductu Arithmetico. pag. 35. lin. 9.
Quantitas discreta, quælibet potest realiter duci in quamlibet discretam quantitatem: sed non quælibet continua quantitas potest realiter duci in quamlibet continuam quantitatem: potest tamen quælibet quantitas continua æquiualenter duci in quamlibet quantitatem continuam. pag. 34.
Quantitas vnius generis quomodo reuocetur ad quantitatem æquiualentem alterius generis. pag. 25. cap. 2.
Quantitatem continuam vehi aut rotari, quid. pag. 29. lin. 24.
Quantitatem continuam vehi aut rotari secundum extensionem quam habet, aut secundum extensionem quam non habet, quid. pag. 29. lin. 24.
Quantitatem negatiuam ductam in quantitatem negatiuam producere quantitatem positiuam, demonstratur. pag. 62. lin 2.

R Adius circuli, siue semidiameter circuli, est recta linea à centro circuli ducta ad eius circumferentiam.
Radius anguli, vide anguli radius.
Radicis extractio, quid. pag. 51. lin. 13.
Ratio vide proportio.
Reductus, quid. pag. 30. lin. 40.
Relatio abstracta & concreta, quid. pag. 41. lin. 26.
Rectangulum cylindricum, quid. pag. 178. lin. 29.
Rotari quantitatem, quid. pag. 29. lin. 24.

S Criptio Logistica indicans operationem Arithmeticam, quomodo differat à scriptione, quæ indicat operationem Geometricam. pag. 29. lin. 35. vel pag. 52. in fine.
Sectio triangularis, circularis, elliptica, parabolica, hyperbolica, quid. pag. 175. lin. 23.
Sectio plana quid. pag. 175. lin. 21.
Sectiones similes, quæ. pag. 175. lin. 35.

Sectio-

Sectionis, circularis, ellipticæ, parabolicæ, & hyperbolicæ, axis, quid. pag.175. lin.26.
Sector circuli, est figura plana terminata vno arcu & duobus radijs eiusdem circuli.
Segmentum circuli, est figura plana terminata vno circuli arcu, & vna recta linea.
Sphæra dimidia, est corpus quod ductu quinto producitur ex basi, quæ fit circuli quadrans, quando circumducitur donec redeat ad eumdem locum. Hinc patet quid sit sphæra, siue sphæra integra.
Sinus anguli, vide anguli sinus.
Subtensa anguli, vide anguli subtensa.
Subiectum concreti, quid. pag.3. lin.23.
Subtractio Arithmetica & Geometrica, quid. pag.49. lin.31.
Superficies, quid. pag.23. lin.11.
Superficies cylindrica præcisè tantũ explanata, quid pag.197. lin.20.

Theorema, quid. pag.17. lin.5.
Theoremata fundamentalia de angulis rectilineis. pag.74. & sequentibus.
Theoremata fundamentalia de proportionibus. pag.102. & sequentibus.
Theoremata vniuersalia de genitis ex ductibus. pag.118 & sequentibus.
Theoremata præcipua Euclidis & Archimedis, Logisticè demonstrata. pag.131. & sequentibus.
Theoremata aliqua de conicis sectionibus. pag.181. & sequentibus.
Theoremata aliqua de parallelogrammis & triangulis cylindricis. pag.195. & sequentibus.
Triangulum, quid. pag 193. lin.15.
Triangulum cylindricum, quid. pag.178. lin.27.
Triangulum rectangulum cylindricum, quid. pag.178. lin.31.
Triangulum cylindricum terminatum lineis breuissimis, aut lineis non breuissimis, quid. pag.193. l. n.30.
Triangula rectilinea similia, quæ. pag.12. lin.30.

Valor quantitatis, quid. pag.25. lin.18.
Veritas per se nota, & non per se nota, quid. pag.16. lin.15.
Vehi quantitatem continuant, quid. pag.29. lin.24.

Typographi errores præcipui hactenus notati.

PAg.62. lin.6. per hic dicta, 1 *ad* A. *lege* . per hic dicta, 1 *ad* — A. Pag.71. lin.24. significat duas tertias partes. *lege*. significat duas sextas partes.

Pag.72. lin.5. recidi à laudabili. *lege*. recedi à laudabili.

Pag.78. lin.12. puncta F & X. *lege*. puncta E & X.

Pag.78. lin.16. vel theor. 1. *lege*. vel theor. 2.

Pag.82. lin.25. vel theor. 1. *lege*. vel theor. 2.

Pag.87. lin.27. per theor. 5. *lege* per theor. 5. & eius corollarium.

Pag.96. lin.19. item lin.22, X *in* A *in* Z *in* A. *lege* X *in* Z *in* A.

Pag.96. lin.33. *cuius vltima verba* mihi alijsque communis *addenda sequentia*. Vtriusque huius definitionis commune fundamentum habes partim in Arithmeticæ multiplicationis definitione, quæ proponitur capite quarto Arithmeticæ introductionis ad nostram Logisticam: partim in expositione ductuum Geometricorum proposita in parte secunda huius Ideæ. Iam vero, supposita ductuum primæ classis intelligentia, quæ non dependet à proportionum æqualitate, hoc loco attulimus definitionem proportionum æqualium innixam prædictæ ductuum intelligentiæ; ipsi vero æqualium proportionum intelligentiæ innititur altera Arithmeticæ multiplicationis definitio, quæ à me proposita est capite 8. partis secundæ, huius Ideæ: quæque mihi propria non est, sed mihi alijsque pluribus communis. *Post hæc sequitur*. Præterea si allata à nobis, &c.

Pag.105. lin.35. ergo ratio A *ad* C = D *ad* E & insuper C *ad* F = D *ad* E. *lege* ergo ratio A *ad* D = B *ad* E, & insuper C *ad* F = B *ad* E.

Pag.108. lin.8. respectu A *ad* B = B *ad* A. *lege*. respectu A *ad* C = B *ad* A.

Pag.119. lin.2. tertias partes. *lege*. sextas partes.

Pag.119. lin.18. significat duas tertias partes. *lege*. significat duas sextas partes.

Pag.142. lin.27. Demonstratio, &c. *lege vt hic sequitur*. Demonstratio. *Per theor*. 2. *cap*. 1. A B K *in* R C ductu secundæ classis *ad* E F L *in* P G ductu primæ clasis = A B K *in* R C *in* 3 *ad* E F L *in* P G *in* 6: sed (quoniam per hypothesim R C = P G) etiam A B K *in* R C *in* 3 *ad* E F L *in* P G *in* 6 = A B K *in* 3 *ad* E F L *in* 6: ergo A B K *in* R C ductu secundæ clasis *ad* E F L *in* P G ductu primæ clasis = A B K *in* 3 *ad* E F L *in* 6. sed (quoniam per hypothesim A B K *ad* E F L = 6 *ad* 3) etiam, *per assert*. 4. *theorematis* 1. *cap*. 1. A B K *in* 3 = E F L *in* 6: *Fig*. 32.

in 6. ergo A B *K in* R C ductu secundæ clasis = E F L *in* P G ductu primæ clasis; atqui A B K *in* R C ductu secundæ clasis = prismati X, item E F L *in* P G ductu primæ clasis = prismati Z: ergo prisma X = prismati Z. Quod erat demonstrandum.

Pag.161. lin 17. Demonstratio, &c. *lege vt sequitur*. Demonstratio. *Per theor.57. superficies* coni sphæræ circumscripti *ad* superficiem sphæræ = 9 *ad* 4 ♎ 36 *ad* 16: sed, *per theor.56.* etiam superficies sphæræ *ad* superficiem coni illi inscripti = 16 *ad* 9: ergo ex æquo superficies coni sphæræ circumscripti *ad* superficiem coni eidem sphæræ inscripti = 36 *ad* 9 ♎ 4 *ad* 1. Quod erat.

Pag.184. lin.4. ctionem *lege* sectionem.

Pag.185. lin.2. si rectæ D C & C B sint diuersæ à communi recta H G atque concurrant in C. *lege* si recta D C perpendiculariter intersecetur à communi recta H G.

Pag.207. lin.2. cylindrico *lege* cylindro.

Pag.208. lin.30. & lin.35. theor.12. *lege* theor.21.

Pag.226. lin.21. sesquialterea. *lege* sesquialtera.

Paginam 216, immediatè sequitur pagina 219, sed nihil prætermissum est ex materia.